Universidade de Lisboa

As aprendizagens realizadas por alunos do 9.º ano na unidade de ensino Probabilidades

Carina Almeida Caminho

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO ENSINO SECUNDÁRIO

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela

Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira

e coorientado pela

Professora Doutora Helena Maria da Encarnação Sezinando

2018

FCT
Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Este trabalho foi realizado no âmbito do Projeto *Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab* (contrato PTDC/MHC-CED/0588/2014), financiado por fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT).

Resumo

Este relatório foi desenvolvido no âmbito da prática de ensino supervisionada tendo por base o trabalho realizado na unidade de ensino de Probabilidades, com uma turma de 9.º ano, do Instituto de Ciências Educativas. A lecionação da unidade de ensino decorreu no final do 2.º período, ao longo de 11 aulas, das quais seis com duração de 45 minutos e cinco com duração de 90 minutos. Durante estas aulas privilegiei o ensino exploratório, recorrendo a tarefas exploratórias, a problemas e exercícios, assim como ao uso de simulações recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia, nomeadamente ao *Geogebra.*

Neste âmbito realizei um estudo com o objetivo de compreender as aprendizagens realizadas por alunos de 9.º ano na unidade de ensino "Probabilidades". A metodologia de investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, tendo como principais métodos de recolha de dados: a recolha das produções escritas de três alunos, a observação participante com registo áudio e vídeo dos momentos de trabalho autónomo e discussões em grupo-turma e a realização de uma entrevista aos participantes no estudo.

A análise de dados evidencia que o ensino exploratório permitiu que os alunos construíssem o seu conhecimento relativamente a conceitos associados à aleatoriedade, ao espaço amostral e ao conceito de probabilidade. A simulação quer recorrendo a materiais manipuláveis quer ao *Geogebra*, favoreceu a aprendizagem dos alunos no que diz respeito à noção de acontecimentos equiprováveis e acontecimentos incompatíveis. Os alunos apresentaram algumas dificuldades relacionadas com a compreensão do enunciado das tarefas, com algumas noções ligadas ao conceito de aleatoriedade e ainda, na construção do diagrama de Venn para o cálculo de uma probabilidade associada a acontecimentos compostos. Na sua generalidade, os alunos parecem não distinguir claramente as duas abordagens do conceito de probabilidade, um aspeto que merece reflexão.

Palavras-chave: Probabilidade; Aprendizagem; Dificuldades; Simulação; 9.º ano

Abstract

This report was developed in the scope of the supervised teaching of the unit Probability, with a 9th grade class from the Instituto de Ciências Educativas. The teaching of this unit took place at the end of the 2nd trimester, with the duration of eleven lessons, six of which with 45min of duration and the other five lessons with a duration of 90min. In this lessons I privileged an exploratory teaching, using exploratory tasks, problems and exercises, as the use of simulations with the resort of handling materials and technology, like *Geogebra*.

In this scope I did a study with the aim of understanding the learning process of 9th grade students in the unit of Probability. The research methodology follows a qualitative and interpretive approach, having as main methods of data collection: collection of written productions from three students; participant observation with video and audio recording of moments of autonomous work and group discussions; and an interview to the participants in the study.

The data analysis indicates that the exploratory teaching allowed students to construct their own knowledge related to concepts associated with randomness, sample space and the concept of probability. The simulation whether with the manipulative materials or with *Geogebra*, favoured the students learning with regard to notions of equiprobable events and incompatible events. The students showed some difficulties related with the understanding of the tasks questions, with some notions related to randomness concept and with the construction of Venn diagrams to calculate the probability associated with compound events. In general, the students seem to not distinguish clearly the two approaches of the concept of probability, a fact that deserves reflection.

Keywords: Probability; Learning; Difficulties; Simulation; 9th grade

“Se tiver o hábito de fazer as coisas com alegria, raramente encontrará situações difíceis.”

Baden Powell

Ao meu avô Albertino

Agradecimentos

Antes de mais quero agradecer à minha orientadora Professora Doutora Hélia Oliveira por todo o seu apoio, dedicação e contributos para este trabalho. Muito obrigada por todas as suas críticas, sugestões e claro, por toda a paciência que teve ao longo destes últimos dois anos!

À minha coorientadora Professora Doutora Helena Sezinando dirijo o meu agradecimento por toda a atenção que teve no que diz respeito ao rigor dos conteúdos matemáticos presentes neste trabalho assim como nas aulas que lecionei.

Ao Professor Valter um especial agradecimento por todos os ensinamentos e conselhos ao longo do último ano. A sua ajuda foi crucial para o bom decorrer de todas as aulas lecionadas!

À Marisa por todas as palavras reconfortantes, por todo o apoio, por toda a amizade! Muito obrigada! Acredita que foi um privilégio incrível partilhar este momento da minha vida contigo! Às minhas colegas de mestrado Maria, Dulce e Carolina, um especial agradecimento pela partilha destes últimos dois anos!

Aos meus amigos Adriana, Danise, Inês, Jéssica, Márcia e Octávio, obrigada pela compreensão. À Beatriz, pela particular ajuda e por todas as palavras de conforto! À Andreia, pela partilha de todas as experiências e por todas as palavras de motivação. À Soraia, por ter sempre aquela palavra de reconforto. Obrigada a todos!

À minha família: aos meus pais, Florbela e Luís, por me permitirem a concretização de um sonho, por conseguirem dar-me um motivo para continuar, mesmo quando tudo parecia sem rumo. À minha irmã, Diana, por todo o apoio. Ao meu avô, Albertino, porque ainda consegui partilhar com ele os primeiros passos deste sonho, sei que ele está a olhar por mim! À minha avó, Madalena, porque semana após semana se preocupa com este sonho!

E em especial ao Fred, porque sem ele nada seria possível! Obrigada por teres paciência para leres tudo, vezes sem conta. Obrigada pelo teu apoio incondicional! Agradeço-te por compreenderes a minha ausência. Os telefonemas e as viagens tentaram encurtar 130 km que nos separaram, mas nem sempre foi fácil! Muito obrigada!

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Índice de anexos

Capítulo 1

Introdução

Este relatório tem por base a experiência da prática de ensino supervisionada que decorreu no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática Profissional IV, do Mestrado em Ensino de Matemática. O primeiro capítulo deste trabalho é composto pela descrição das minhas motivações pessoais, assim como pelo objetivo e questões que orientam o estudo.

1.1. Motivações

De acordo com a organização dos temas a estudar ao longo do ano letivo e, uma vez que a Prática de Ensino Supervisionada teria de ocorrer entre o 2.º e o 3.º Período, houve necessidade de escolher um tópico a ser abordado nesta altura do ano. Neste sentido surge a temática das probabilidades, um tema muito presente em situações do quotidiano, em que qualquer pessoa utiliza a expressão "mais provável" ou "menos provável" com elevada frequência. Por exemplo, todos nós acabamos por fazer conjeturas sobre determinados acontecimentos, mesmo as pessoas que não têm qualquer formação no assunto, criando muitas vezes ideias incorretas. Deste modo, considero que seja um tema privilegiado para captar a atenção dos alunos e despertar neles um interesse pela disciplina. É também um tema pelo qual tenho particular interesse dada a possibilidade de ser trabalhada de um modo mais lúdico com os alunos, recorrendo por exemplo a materiais manipuláveis.

Senti-me motivada a lecionar esta unidade de ensino, visto que o 9.º ano de escolaridade é o primeiro momento em que os alunos se deparam com a formalização do conceito de probabilidade. Apesar de muitos professores considerarem que este tema não levanta grandes dificuldades aos alunos, a investigação tem demonstrado exatamente o contrário (Fernandes, 1999). Tenho noção que esta unidade de ensino pode constituir um grande desafio para o professor, dado ser responsável pela primeira abordagem formal destes conceitos. Enquanto aluna, aquando da abordagem deste tópico, não utilizei qualquer material manipulável nem simulação, pelo que senti necessidade de alterar esta realidade, podendo abordar esta unidade de uma forma mais exploratória e que contribua para melhorar a compreensão dos alunos relativamente a este tópico.

No programa de matemática no ensino básico (MEC, 2013), os conteúdos de probabilidades integram-se no domínio da organização e tratamento de dados.

Ao longo de todo o meu percurso académico, verifiquei que a Matemática é uma disciplina com muito desinteresse por parte de muitos alunos. Assim sendo, como futura profissional na área, pretendo motivar os alunos para com o passar do tempo, contrariar esta tendência.

1.2. Objetivo e questões de investigação

No âmbito da minha intervenção letiva desenvolvi um estudo com o objetivo de compreender as aprendizagens realizadas por alunos de 9.º ano na unidade de ensino "Probabilidades". Esta intervenção decorreu numa turma de 9.º ano de escolaridade do Instituto de Ciências Educativas, na localidade da Ramada, durante o 2.º período do ano letivo 2017/2018, ao longo de 11 aulas. Este estudo pretende responder às seguintes questões:

- Que aprendizagens realizam os alunos relativamente a conceitos associados:
  - à aleatoriedade;
  - ao espaço amostral;
  - à probabilidade?
- Quais as dificuldades que os alunos evidenciam na resolução das tarefas propostas na unidade de ensino?

Pretendo também com este estudo refletir sobre a minha prática profissional enquanto professora, pela primeira vez, lecionando integralmente uma unidade didática.

1.3. Organização do relatório

O relatório da prática de ensino supervisionada tem por base o estudo realizado acerca da temática das "Probabilidades". Como tal, este relatório inclui uma componente investigativa seguindo as características de um trabalho desta natureza, estando organizado em seis capítulos.

Após este primeiro capítulo introdutório, no segundo capítulo, é apresentado um enquadramento curricular e didático com o objetivo de contextualizar e justificar as opções didáticas e metodológicas da prática de ensino supervisionada.

O terceiro capítulo é dedicado à unidade de ensino, sendo realizada uma breve contextualização do ambiente escolar onde decorreu a intervenção letiva. Nesta secção são justificadas as opções tomadas e apresentados os conceitos fundamentais da unidade de ensino, as estratégias usadas, uma descrição geral das tarefas, uma breve descrição de cada aula lecionada e, por último, uma secção dedicada à avaliação.

No quarto capítulo são apresentados os instrumentos e procedimentos de recolha e de análise de dados, de forma a poder avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos ao longo da unidade de ensino. Contemplo ainda uma secção para justificar a escolha dos participantes do estudo.

O capítulo cinco é dedicado à análise dos dados recolhidos com vista a responder, posteriormente, às questões de investigação. Neste capítulo apresento a análise relativa aos conceitos associados à aleatoriedade, aos conceitos associados ao espaço amostral e, por fim, ao conceito de probabilidade.

Por fim, no último capítulo são apresentadas as conclusões deste estudo, respondendo às questões de investigação. Nesta secção faço também uma reflexão sobre o trabalho realizado ao longo da intervenção letiva.

Capítulo 2

Enquadramento curricular e didático

Neste capítulo apresento um enquadramento curricular e didático referente ao tema das probabilidades no ensino básico. Neste sentido, abordo o conceito de probabilidade, a aprendizagem das probabilidades, o ensino das probabilidades, a importância do tema, os tópicos a ensinar, o uso da simulação, dos materiais manipuláveis e, por fim, da tecnologia, nomeadamente do *software Geogebra.*

2.1. O conceito de probabilidade

A necessidade de compreensão de fenómenos aleatórios de modo a que tomem decisões ponderadas e adequadas levaram a que muitos países incluíssem as probabilidades nos seus currículos, desde o ensino primário ao universitário (Batanero, 2015). Em Portugal, a probabilidade está presente nos programas escolares de matemática, no ensino básico, há algumas décadas.

Segundo consta, a teoria da probabilidade remonta a 1654, quando Pascal iniciou uma troca de correspondência com o matemático Fermat, depois de Chevalier de Méré lhe propor um problema relacionado com os jogos de azar (Azevedo, 2004).

De acordo com a brochura de organização e tratamento de dados (Martins & Ponte, 2010), "a probabilidade, (…) não é fácil de definir, a menos que estejamos em condições de recorrer a conceitos matemáticos precisos" (p.163).

Batanero (2005) considera que podemos atribuir diversos significados ao conceito de probabilidade, baseados em dois pontos de vista: subjetivo e objetivo. Segundo a autora, o significado intuitivo da probabilidade está relacionado com os jogos de sorte e azar, baseando-se apenas numa questão de crença e de apreciação. O significado Laplaciano, também conhecido como significado clássico está fortemente associado ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. A autora aponta ainda o significado frequencista, de caráter objetivo, que permite obter um valor aproximado para o qual a frequência relativa tende a estabilizar. O significado subjetivo surge a partir da regra de Bayes, sendo usada para quantificar a incerteza em experiências aleatórias abstratas. Por fim, Batanero (2005) acrescenta ainda um último significado ao conceito de probabilidade, o matemático, associado à teoria dos conjuntos.

Por sua vez, Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991, citados por Fernandes & Correia, 2016) consideram a existência de quatro conceitos de probabilidade idênticos à classificação de Batanero (2015): conceito clássico, frequencista, subjetivista e estrutural. Estes conceitos relacionam-se, respetivamente, com a regra de Laplace, com a frequência relativa em experiências que se repetem um grande número de vezes nas mesmas condições. Por sua vez, o conceito subjetivista está relacionado com as preferências do individuo, uma vez que estas influenciam a sua tomada de decisão. Por fim, o conceito estrutural baseia-se em axiomas pré-definidos, bem como um conjunto de teoremas que deles advêm.

Um conceito chave associado à probabilidade é o conceito de aleatoriedade, o qual Batanero (2015) considera ser difícil de definir. Muitas vezes a definição de aleatório está associada a algo incerto, dependente da sorte e do azar (Batanero, 2015). Nesta perspetiva, o aleatório está associado a um fenómeno com causas desconhecidas. Alguns filósofos no passado acreditavam que nada acontecia aleatoriamente e, portanto, tudo acontecia por uma razão. Já no século XX, Poincaré distinguiu fenómenos aleatórios que podem ser estudados com cálculo de probabilidade, de outros fenómenos onde não se pode aplicar o cálculo de probabilidade. (Batanero, 2015).

A mesma autora descreve quatro conceções de aleatoriedades: aleatoriedade como equiprobabilidade, ou seja, considera-se que há aleatoriedade quando todos os resultados possíveis são igualmente prováveis; aleatoriedade em oposição a causalidade; aleatoriedade como incerteza, ou seja, existência de múltiplas possibilidades nas mesmas condições; aleatoriedade como modelo para representar algum fenómeno.

Os alunos possuem conhecimentos intuitivos acerca do tema de probabilidades que devemos ter em consideração, uma vez que usualmente recorrem a conceitos probabilísticos para se referirem, por exemplo, a jogos de sorte e azar ou até à probabilidade de chover ou fazer sol. No entanto, também é necessário que "os alunos tenham uma ideia do grau de confiança a atribuir às previsões" (Mendoza & Swift, 1989, p.17).

Batanero, Chernoff, Engel, Lee e Sánchez (2016) também consideram que é importante ter em conta as ideias informais que os alunos atribuem ao acaso. No entanto, Fernandes (1999) considera que não se deve assumir que os alunos possuem um esclarecimento total acerca dos conceitos de acontecimentos certos, possíveis, impossíveis, prováveis e improváveis. Desta forma, o docente poderá partir destas ideias, mesmo que erróneas, para a construção e consolidação destes novos conhecimentos. Para Watson (2006, citado por Nacarato & Grando, 2014), a probabilidade deve ser introduzida aos alunos usando a linguagem própria do acaso, nomeadamente com os termos "possível", "impossível" e "certo".

2.2. A aprendizagem das probabilidades

Diversos autores afirmam que a aprendizagem matemática deve contemplar conhecimentos de estatística e probabilidades, uma vez que se trata de um tópico crucial em variados campos (Serrazina & Oliveira, 1999). Como o conceito de probabilidade é de difícil compreensão, o ensino das probabilidades foi adiado para o 9.º ano, uma idade em que as intuições erradas dificultam no processo de aprendizagem dos conteúdos a abordar (Batanero, 2015).

O conceito de probabilidade ajuda na compreensão de outros tópicos matemáticos "ligados aos números, às medidas ou às representações gráficas, e envolvendo capacidades matemáticas importantes, nomeadamente de estimação e de resolução de problemas" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p.93). Os autores defendem ainda que a aquisição formal deste conceito é muito complexa para ser considerada uma meta a atingir no ensino básico. Recomendam que devem ser fornecidas ferramentas para a posterior aquisição destes conhecimentos. De acordo com os estudos de Piaget, o conceito de probabilidade apenas seria compreendido no estádio das operações formais, isto é, entre os 11 e os 17 anos, pelo que não faria sentido a sua abordagem antes do ensino secundário. No entanto, teorias posteriores verificaram que as crianças são capazes de compreender situações envolvendo a noção de probabilidade, desde que acompanhadas pelo professor e com auxílio de experiências reais ou simulações (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

As situações de incerteza conduzem a que alunos e adultos cometam erros quando raciocinam acerca destes acontecimentos (Henriques & Oliveira, 2017). Desta forma, Sánchez e Valdez (2017) afirmam que o raciocínio probabilístico poderá surgir em três situações: a resolução de um problema de probabilidade e a sua justificação, uma sucessão de argumentos para provar a veracidade de uma afirmação probabilística ou ainda, no processo mental que se desenvolve no individuo nas duas situações anteriores.

Os autores criaram ainda quatro níveis de raciocínio em relação às ideias fundamentais de probabilidade. Para este nível de ensino irei só considerar os níveis relativos à aleatoriedade.

No nível 1 o raciocínio dos alunos é, claramente, determinista, estando perante a ausência de expressões acerca da incerteza do que pode acontecer numa experiência. No nível 2 os alunos utilizam linguagem probabilística, mas as suas respostas são deterministas. Neste nível os alunos consideram que em cada repetição da experiência a probabilidade será diferente, usando argumentos como "pode ser que…" e "eu acho que…" revelando incapacidade de prever o resultado. No nível 3 os alunos consideram que há incerteza, no entanto apresentam uma tendência para um determinado acontecimento. No nível 4 os alunos reconhecem que não é possível prever com exatidão o resultado de uma experiência, mas já consideram que respostas incertas são válidas, como é o caso de expressões como "Pode-se obter uma bola de qualquer cor" (Sánchez & Valdez, 2017).

Os autores concluem ainda que as inferências e representações que os alunos fazem relativamente a situações probabilísticas que envolvam os conceitos de probabilidade, quer clássico quer frequencista, são influenciadas pelo nível de raciocínio adquirido.

Fernandes (1999) afirma que muitos professores acreditam que a aprendizagem de probabilidades no ensino básico não levanta grandes dificuldades aos alunos, no entanto, a investigação tem contrariado esta ideia. De seguida apresentarei algumas das dificuldades demonstradas pelos alunos neste tema ao longo das investigações.

O autor considera que estas dificuldades estão muitas vezes relacionadas com o modo redutor como o conceito de probabilidade é abordado na sala de aula, dado que "frequentemente, ele é apresentado aos alunos apenas como fração do número de casos favoráveis, pelo número de casos possíveis (Fernandes, 1999). Deste modo, reduz-se o estudo das probabilidades ao estudo de frações simples" (p.21). Garfield e Ahlgren (1988, citados por Correia & Fernandes, 2014) consideram que alguns alunos ganham uma certa aversão ao tema dada a sua abordagem demasiado teórica e formal.

Primeiramente, a interpretação do enunciado é um dos grandes problemas e dificuldades dos alunos na resolução de tarefas matemáticas (Nacarato & Grando, 2014). Particularmente no ensino das probabilidades, caso os alunos não consigam interpretar a questão, não têm capacidades para aplicar os conhecimentos de probabilidades. Podemos considerar, desta forma, que a interpretação dos enunciados pode ser um entrave para a aprendizagem das probabilidades pelos alunos.

A investigação tem mostrado que os alunos têm dificuldades que "geralmente provêm da compreensão das condições que regem a experiência realizada e do conjunto de possíveis resultados ligados à mesma" (Fernandes, 2001, citado por Fernandes, Serrano & Correia, 2016, p.85). De acordo com os mesmos autores, os alunos não têm facilidade em aplicar o conceito de acontecimento certo, dado que é necessária uma análise profunda de todos os casos, de modo a verificar se todos os casos possíveis são comprovados.

Os autores identificam ainda que os alunos apresentam dificuldades em sugerirem acontecimentos dada a sua classificação, isto é, dado um tipo de acontecimento, serem capazes de enunciar uma situação que o verifica: por exemplo, no contexto de lançamento de um dado, em que se observa o número de pintas voltadas para cima, serem capazes de identificar um acontecimento certo. Estas dificuldades podem estar relacionadas com as intuições incorretas que os alunos têm acerca do tema.

Fernandes (1999) verificou ainda que as dificuldades dos alunos aumentam quando se incluem conectivos lógicos na formulação de acontecimentos, nomeadamente *e*, *ou* e *não*. Por exemplo, relativamente a uma experiência que consiste em retirar uma bola de um saco com bolas numeradas de 1 a 6, os alunos apresentam dificuldades no cálculo da probabilidade de não sair bola com um número 3.

Vários estudos revelam ainda que a Lei dos Grandes Números é um conceito de difícil compreensão para os estudantes (Ireland &Watson, 2009 citados por Sánchez & Valdez, 2017), trazendo, portanto, dificuldades em utilizar o significado frequencista para o cálculo de probabilidades. Montes (2017) verificou ainda que os alunos apresentam dificuldades no conceito de equiprobabilidade e em identificar o papel da aleatoriedade em determinadas situações. De acordo com os estudos realizados por Piaget e Inhelder em 1975, o conceito de aleatoriedade varia de acordo com os estádios do desenvolvimento cognitivo do individuo (Sánchez & Valdez, 2017).

Montes (2017) acrescenta ainda que os alunos associam frequentemente o conceito de aleatoriedade ao acaso ou a algo que é incerto. O autor pondera que algumas dificuldades poderão advir da mecanização dos cálculos, ao invés de se centrarem na compreensão dos vários conceitos.

Rico (1995, citado por Montes, 2017) e Montes (2017) revelam que os alunos apresentam dificuldades no cálculo de probabilidades recorrendo a um diagrama de Venn, resultando essencialmente de uma incorreta interpretação dos dados. Muitas vezes os alunos apresentam também dificuldades na compreensão de experiências compostas por não estarem habituados a experiências compostas (Montes, 2017).

De acordo com Garfield e Ahlgren (1988, citados por Correia & Fernandes, 2014), o raciocínio proporcional é outro aspeto em que muitos alunos apresentam dificuldades e que é importante neste tópico. Deste modo, Fernandes (1999) defende que se deve promover o raciocínio proporcional e que se deve ainda incluir desde o início do estudo conectivos lógicos na formulação de acontecimentos, de modo a evitar futuras dificuldades.

Batanero, Godinho e Cañizares (2005, citados por Dias, 2015) verificaram que alunos e docentes apresentam dificuldades relativamente probabilidades, dificuldades essas provenientes da divergência entre as suas ideias e o exato significado do que se está a estudar. Santana (2011, citado por Monteiro & Martins, 2016) considera que as dúvidas dos docentes acerca de algumas noções básicas de probabilidade provocam uma dificuldade na exploração destes conteúdos na sala de aula. Muitas vezes a falta de conhecimento assenta na terminologia usada relativamente aos conceitos de espaço amostral, ao acaso e aos fenómenos aleatórios.

2.3. O ensino das probabilidades

2.3.1. A importância do tema

O ensino da matemática é muitas vezes associado a equações, fórmulas e cálculos, esquecendo-se muitas vezes de outras áreas fundamentais para interpretação do mundo que nos rodeia. Bernardes (1987) afirma:

> Se o ensino da Matemática se deve ocupar mais de uma forma de pensar do que de uma forma de escrever fórmulas ou numerais, se o ensino da Matemática se deve ocupar mais da tomada consciente de decisões do que do estrito cálculo, então a teoria das probabilidades é fundamental. (p.13)

O ensino de probabilidades é, portanto, um tópico com elevada importância dado que os alunos contactam com ele frequentemente, fora do contexto de sala de aula, muitas vezes criando ideias erróneas acerca de determinados conceitos do tópico que é necessário serem esclarecidas (Garfield & Ahlgren, 1988, citados por Montes, 2017). Este tópico tem continuidade em estudos futuros, nomeadamente na disciplina de Matemática, nos cursos do ensino secundário quer em cursos científicos, quer nas ciências sociais e humanas. Além disso, os conceitos probabilísticos são usados noutras áreas científicas como é o caso por exemplo da Biologia, no estudo das características hereditárias ou até na Geografia, Economia e Política. Para além das ferramentas matemáticas que devem dominar, os alunos podem, de acordo com o NCTM (1991), desenvolver outras capacidades:

> A estatística e as probabilidades constituem elos importantes com os conteúdos de outras áreas, tais como os estudos sociais e as ciências. Podem também reforçar a destreza na comunicação, desde que as crianças tenham de discutir e descrever as suas atividades e as suas conclusões. No domínio da matemática, estes tópicos envolvem, habitualmente, o uso de números, medidas, estimações e resolução de problemas. (p.66)

Sánchez e Valdez (2017) consideram que o primeiro objetivo do ensino das probabilidades deverá ser o desenvolvimento de um raciocínio informal acerca das ideias sobre a variabilidade, a aleatoriedade e a independência. Os autores revelam que o ensino tem tendência a abordar apenas o conteúdo, não fornecendo estratégias para superar as dificuldades dos alunos. Desta forma, é criada uma lacuna entre o conhecimento informal dos alunos e o conhecimento normativo que lhes é pedido aprender, sendo crucial articular o ensino com as ideias prévias que os alunos têm sobre o tema das probabilidades.

Montes (2017) alerta para a necessidade de tratar o conceito de probabilidade frequencista com especial atenção, para que o conceito fique bem consolidado, de modo a evitar que os alunos demonstrem dificuldades em conceitos posteriores, nomeadamente o conceito de equiprobabilidade. Batanero (2005, citado em Montes, 2017) alerta ainda para que o conceito de equiprobabilidade deve ser tratado recorrendo a materiais manipuláveis, antes da lecionação do conceito clássico de probabilidade e do conceito frequencista, de modo que os alunos compreendam que nem todas as experiências originam acontecimentos equiprováveis. Sánchez e Valdez (2017) salientam ainda a importância de articular o conceito clássico de probabilidade com o conceito frequencista, a partir da Lei dos Grandes Números.

Batanero (2015) recomenda que desde o ensino primário se devam abordar conceitos relativos à probabilidade. Refere ainda que, numa fase inicial de abordagem às probabilidades, se devam utilizar materiais simétricos, como é o caso de uma moeda ou de um dado e apenas numa segunda fase introduzir objetos assimétricos onde só podemos estimar a probabilidade. Numa fase posterior, a autora defende que se possa recorrer a situações subjetivas acerca de fenómenos do dia-a-dia.

A probabilidade é claramente um instrumento para a Estatística, sendo necessárias diversas abordagens que promovam diferentes tipos de raciocínio (Henriques & Oliveira, 2017). Muitas vezes os alunos recorrem apenas à regra de Laplace para calcular a probabilidade de um acontecimento, no entanto "esta forma (…) não é a adequada para encontrar probabilidades relativas à maioria das situações da vida real" (Henriques & Oliveira, 2017, p.24). Deste modo, torna-se necessário contrariar a preponderância que é dada ao conceito clássico de probabilidade, vulgarmente denominada por regra de Laplace.

2.3.2. Os tópicos a ensinar

Embora o conceito de probabilidade, em Portugal, ser introduzido apenas no 9ºano, o NCTM (citado por Canavarro & Duarte, 2012) propõe que as probabilidades devem ser abordadas em todos os níveis não superiores, inclusive o pré-escolar, permitindo que compreendam e apliquem conhecimentos básicos de probabilidade, evitando assim que criem ideias incorretas ao longo dos anos. Também Knowler e Knowler (1981, citados por Duque, Pinho & Carvalho, 2013) consideram que na fase de educação pré-escolar as crianças devem começar a contactar com alguns conceitos de probabilidades.

O NCTM (1991) recomenda que o tema das probabilidades seja abordado no 4.º nível de escolaridade, explorando o conceito do acaso. No que diz respeito do 5.º ao 8.º nível de escolaridade, refere que "deve incluir explorações em torno da noção de probabilidade, em situações do mundo real" (p.129). Nestes níveis os alunos devem ser capazes de modelar situações de forma a calcular valores de probabilidades, usar as probabilidades no mundo real, fazendo previsões que sejam baseadas nas probabilidades experimentais ou teóricas. Devem ainda ser capazes de comparar os valores relativos às probabilidades experimentais com os valores esperados pela probabilidade teórica. Relativamente aos níveis 9-12, o NCTM (1991) considera que é importante que todos os alunos usem o conceito de probabilidades para resolver problemas que envolvam o conceito de incerteza, usem simulações de forma a poderem estimar probabilidades, compreendam a conceção de variável aleatória, "criem e interpretem distribuições discretas (…) descrevam a curva normal e usam as suas propriedades para responder a perguntas" (p.205). Acrescenta ainda que os alunos que pretendam ingressar no ensino superior devem saber aplicar "o conceito de variável aleatória para gerar e interpretar distribuições de probabilidade, incluindo a binomial, uniforme, normal e qui-quadrado" (p.205).

É necessário termos em conta que tanto o NCTM como o currículo Português (Ponte, Serrazina et al., 2007) "têm subjacente uma ideia fundamental (…): o conhecimento estatístico visa o estudo de situações e problemas reais que interessam aos alunos de modo a proporcionar-lhes o seu conhecimento" (Canavarro & Duarte, 2012, p.1).

Fernandes (1999) considera que, no 9.ºano, devem-se contemplar três grandes temas nesta abordagem: termos e conceitos probabilísticos, probabilidade em experiências simples e probabilidade em experiências compostas. Por sua vez o programa de Matemática (MEC, 2013, p. 27) indica que os alunos devem dominar os seguintes conteúdos:

- Experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis;
- Acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível;
- Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares;
- Experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis;
- Definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos;
- Problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore;
- Comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.

2.3.3. O uso da simulação

Vários investigadores, citados por Batanero, Chernoff, Engel, Lee e Sánchez (2016) referem que a probabilidade deve ser ensinada como forma de modelar fenómenos reais e não apenas como um fenómeno abstrato. Chance, delMas e Garfield (2004, citado em Fernandes, Serrano & Correia, 2016) consideram que os alunos se envolvem mais na aprendizagem da Estatística quando são usadas simulações. Entenda-se por simulação o “processo artificial utilizado para imitar o comportamento de um fenómeno aleatório, utilizando, de um modo geral, números aleatórios” (Martins, 2011, p.2).

A simulação não surgiu há pouco tempo, até pelo contrário, sempre foram elaboradas simulações, mas apenas nos últimos tempos tem-se confiado nos resultados destas (Bellemain, Bellemain & Gitirana, 2006). Por esta razão, a simulação tem sido, cada vez mais, um instrumento frequente na sala de aula. A sua utilização permite realizar experiências dentro da sala de aula que seriam impossíveis de executar de forma tradicional, quer no que diz respeito à complexidade da experiência, quer ao tempo usado para a realização das mesmas. Também Fernandes, Bernabeu, Garcia e Batanero (2009) justificam o uso da simulação no ensino das probabilidades e Estatística pela “dificuldade em ir além dos tradicionais jogos de sorte-azar e de problemas simples através de outros métodos” (p.162).

Através da simulação, o aluno constrói o seu próprio conhecimento uma vez que permite explorar determinadas situações propostas pelo professor (Bellemain, Bellemain & Gitirana, 2006). Lane e Peres (2006, citados por Henriques e Oliveira, 2017) defendem que se deve evitar o uso da simulação quando o aluno não tenha um papel ativo no seu manuseamento. No entanto, apesar das vantagens do uso da simulação, Borovcnik (2006, 2007, citado em Fernandes, Bernabeu, Garcia & Batanero, 2009) considera que esta não concede pistas de como se resolvem verdadeiramente os problemas. Fernandes, Bernabeu, Garcia e Batanero (2009) acrescentam que a simulação não responde a todas as dificuldades demonstradas pelos alunos no ensino de probabilidades, pelo que deve haver um bom senso por parte do docente na sua utilização em sala de aula.

Existe uma variedade de *softwares* que permitem a criação de simulações, no entanto, é necessário ter em conta as vantagens de cada uma e a melhor maneira de as usar em sala de aula. O *Geogebra* é um dos *softwares* em que é possível criar *applets* para exploração. Montes (2017) defende que, no ensino das probabilidades, a utilização deste *software* de geometria dinâmica como uso da simulação deve ser equilibrada com o recurso a materiais manipuláveis. Por um lado, o uso do *software* pode ajudar a combater algumas conceções erradas que os alunos poderão apresentar e, por outro, os materiais manipuláveis permitem-lhes ter um primeiro contacto com os conceitos que queremos estudar. Para o autor, o *Geogebra* ajuda a compreender determinados conceitos de probabilidade, como é o caso da probabilidade frequencista, uma vez que permite obter acontecimentos equiprováveis, o que nem sempre acontece quando se recorre a materiais manipuláveis, induzindo em erro os alunos.

2.3.4. O uso de materiais manipuláveis

Desde os tempos mais antigos que o Homem usa objetos para a realização de atividades matemáticas. Ao longo dos anos os materiais tendem a ser modificados, mas a essência da atividade continua. Em sala de aula é também frequente o uso de materiais manipuláveis. Mansutti (1993, citado por Caldeira, 2009) considera que um material didático é aquele que junta aprendizagem com formação. Bezerra (1962, citado por Caldeira, 2009) considera que material didático é aquele que o professor utiliza como um meio para a aprendizagem. Para Caldeira (2009) os materiais manipuláveis são um instrumento de mediação, que permitem desenvolver conceitos matemáticos. Estes materiais devem ser dominados pelo professor, de forma a poder percecionar as potencialidades educativas de cada material, de forma a promover aprendizagens significativas.

> Consoante este tipo de experiências, os alunos criam imagens de algo que lhes é familiar no seu quotidiano e, portanto, ampliam a capacidade de representar mentalmente objetos e vivências, criando uma maior ligação com os conteúdos matemáticos, que à partida parecem complexos. (Camacho, 2012)

A autora refere ainda que é crucial que o docente adapte as abordagens que utiliza em sala de aula consoante as necessidades de cada aluno

Lima, Bezerra e Valverde (2016) consideram que os materiais manipuláveis oferecem diversas vantagens para a aprendizagem:

- Despertam a curiosidade dos alunos;
- Favorecem o desenvolvimento da perceção dos alunos através das interações entre os colegas e o professor;
- Ajudam à descoberta das relações matemáticas subjacentes a cada material;
- São motivadores de aprendizagem, sendo atribuído um significado ao conteúdo;
- Facilitam a internalização das relações percebidas.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) recomendam que o ensino das probabilidades deve ser experimental invocando sempre o raciocínio matemático. Numa fase inicial, os materiais manipuláveis permitem ao aluno obter um contacto informal com determinados conceitos e só numa segunda fase, são desenvolvidos os conhecimentos formais, através da intervenção do docente (Caldeira, 2009). A autora acrescenta ainda:

> É fundamental não esquecer que a utilização de materiais, por si só, não traduz uma aprendizagem eficaz e significativa da matemática, que deve ser um processo ativo, vivenciado pela criança, onde pode explorar, desenvolver, testar, discutir aplicar ideias, refletir, de modo a serem um meio e não um fim (p.589).

O NCTM (2000) recomenda a utilização de materiais uma vez que o processo de aprendizagem requer envolvimento e experiência por parte do aluno. O Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (DEB, 2001) considera que as materiais manipuláveis são úteis ao longo da escolaridade “como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares” (p.71), acrescentando que estes materiais são apenas um meio para a construção da aprendizagem e não um fim. Por sua vez, o atual Programa e Metas Curriculares Matemática (ME, 2013) apenas sugere a utilização de materiais manipuláveis para os alunos do 1.º ciclo do ensino básico.

De acordo com um descritor operativo presente no documento do perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória (ME, 2017), podemos verificar que “os alunos trabalham com recurso a materiais, (…) e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos, científicos e socioculturais” (p.29). Assim, para o aluno do século XXI, é recomendado que trabalhem com materiais manipuláveis.

Bruner (1986, citado por Veiga, Caldeira & Melo, 2013) considera que o professor pode recorrer a uma representação motora, através de objetos, de forma a poder conduzir os alunos à construção da sua própria aprendizagem. O autor defende ainda que este modelo possibilita o aluno ter um papel ativo na construção do seu saber, favorecendo o gosto por aprender. De acordo com Sousa (2005), também a teoria Piagetiana pressupõe que os alunos manipulem diretamente os materiais e que, através da interajuda promovam o “desenvolvimento da autonomia intelectual, social e moral” (p.15).

Alguns investigadores propõem que, numa primeira abordagem ao tópico das probabilidades, se devem usar materiais manipuláveis e só posteriormente se estabeleçam comparações com simulações em computador (Fernandes, Bernabeu, Garcia & Batanero, 2009; Montes, 2017), como referi anteriormente.

2.3.5. O uso da tecnologia

Numa era em que os alunos são considerados nativos digitais, a escola está em risco de se manter como o principal meio de aprendizagem. A linguagem com que os alunos contactam com as tecnologias digitais torna-se, muitas vezes, mais apelativa do que aquela que surge no contexto escolar (Carreira, 2009). Desta forma, é essencial que a escola dos dias de hoje se adapte para conseguir captar a atenção dos alunos, promovendo uma boa aprendizagem. Monteiro e Martins (2016) consideram que "o uso das TIC como recurso pode ser um caminho interessante para auxiliar o professor a desenvolver novas abordagens para o ensino de probabilidade" (p.16).

Ponte (2005) defende que as novas tecnologias são uma "possibilidade de envolver os alunos em matemática intensa e, significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina" (p.2). No entanto, a sociedade considera que computador é um sinónimo de tecnologia e, portanto, se recorrer a uma apresentação *PowerPoint*, por exemplo, já está a adaptar-se aos nativos digitais. Para Frand (2000, citado por Carreira, 2009), esta tecnologia já é banal e, portanto, não se trata de uma novidade para estes alunos, não sendo possível provocar o efeito de interesse que se esperava obter.

> Em Matemática, por exemplo, o debate não deverá continuar preso a se deveremos usar ou não a calculadora e o computador – eles fazem parte do mundo dos Nativos Digitais – mas antes centrar-se em como poderemos usá-los para introduzir as coisas que serão úteis se forem absorvidas, desde capacidades e conceitos até factos como os da tabuada da multiplicação (Prensky, 2001, citado por Carreira, 2009, p. 62).

Num documento em que manifestou a sua posição quanto às tecnologias na Educação Matemática, a Associação de Professores de Matemática (2001) considera que "as ferramentas tecnológicas devem ser integradas de forma consciente (…) proporcionando (…) verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas" (p.24). Refletindo sobre a escola, estão conscientes que é necessário ter em conta as condições existentes na escola, sendo de igual forma importante apostar na formação de professores. Apesar da APM (2001) recomendar que "todos os alunos e professores tenham acesso a computadores, com *software* didático e ligações à internet" (p.24), 17 anos depois estamos ainda longe desta realidade.

Também Batanero, Chernoff, Engel, Lee e Sánchez (2016) consideram que uma forma de ajudar os alunos a modelar os fenómenos reais é pelo uso da tecnologia. No domínio da estatística e probabilidade, os autores defendem que a utilização deste recurso é bastante útil uma vez que permite gerar uma amostra de grandes dimensões de forma rápida e eficaz e de criar rapidamente tabelas e representações gráficas.

Podemos verificar que é cada vez mais frequente o uso da tecnologia e, de facto, faz sentido dado que "estes recursos permitem explorar os conceitos de probabilidade e inferência e substituir as demonstrações formais por raciocínios mais intuitivos" (Fernandes, Bernabeu, Garcia & Batanero, 2009, p.162).

O NCTM (2014) considera que para além do computador, os dispositivos móveis, como é o caso dos smartphones e dos tablets, podem ser usados na aula de matemática para recolher dados, realizar pesquisas e executar aplicações e simulações que permitam a resolução de problemas. Estes dispositivos poderão ser usados em casa, por exemplo, dado que a sua utilização em sala de aula é proibida em muitas escolas.

No que diz respeito ao uso de tecnologia no ensino das probabilidades, verifica-se que até as crianças mais jovens são impulsionadas a realizar experiências aleatórias ou simulações, formulando perguntas ou conjeturas sobre a tendência dos resultados de uma dessas experiências, justificando as suas conclusões com base nesses dados (Batanero, 2015).

Nos dias de hoje existem diversos recursos tecnológicos para usar no ensino da matemática e um dos *softwares* mais utilizados é o *Geogebra*. Este permite explorar situações em diversos tópicos matemáticos, desde funções, álgebra e geometria, este software permite ainda trabalhar conceitos estatísticos e probabilísticos. Inzunza (2014, citada por Montes (2017) considera que o *Geogebra* permite "manipular certas variáveis ou parâmetros para visualizar comportamentos dos conceitos envolvidos. Em Probabilidade e Estatística, onde a variabilidade é um fenómeno intrínseco de seus conceitos, isto é particularmente relevante" (p.3). Após a construção de um *applet*, os alunos podem fazer variar os diversos parâmetros em estudo de forma a poderem retirar conclusões relativamente ao conceito em causa. A um nível mais avançado, o *Geogebra* permite estudar as distribuições de probabilidade, fazendo variar os seletores.

Del Pinto (2013, citado por Montes, 2017) refere que o *Geogebra* é um software vantajoso em sala de aula nomeadamente por ser de utilização livre, não sendo necessária qualquer licença; sendo ainda acessível em diversas plataformas, quer através dos diversos sistemas operativos, do sistema android ou até online. Permite ainda a exportação das *applets* construídas para uma página *html*. É um *software* de fácil utilização e muito intuitivo para os alunos sendo ainda muito rico dada a sua dualidade entre a visualização gráfica e algébrica. Numa exploração com o *Geogebra* em que o autor sugere a construção de novas ferramentas, Raposo (2011) revela que:

> Após a primeira aula de apresentação do *GeoGebra*, os alunos fazem questão de referir que já possuem a aplicação no computador pessoal. Fazem-no com a convicção que estão prontos para trabalhar, quer na sala de aula, quer em casa, reconhecendo mais-valia nessa possibilidade (p.38).

Apesar de apresentar diversas vantagens, este software apresenta também algumas limitações, nomeadamente, a possível desvalorização da componente analítica, no entanto, este caso não é aplicável ao estudo das probabilidades. Outra limitação não só do *Geogebra*, mas de qualquer ferramenta tecnológica que necessite de computadores está relacionada com a dimensão da turma em comparação com o número de computadores disponíveis. Em grande parte das escolas existem poucos computadores disponíveis e as turmas tomam proporções elevadas, muitas vezes atingindo os 30 alunos, pelo que se torna uma limitação na utilização do *software* em sala de aula.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

3.1. Contexto Escolar

3.1.1. Caracterização da Escola

O Instituto de Ciências Educativas (ICE), onde decorreu a minha prática de ensino supervisionada, fica situado na Ramada, pertencendo ao concelho de Odivelas, distrito de Lisboa. Esta é uma escola de domínio privado que faz parte do grupo Pedago. Surgiu em 1984 e desde então conta com escolaridade básica e secundária. Ao nível do ensino secundário, a escola oferece os cursos Científico Humanísticos, não dispondo de qualquer curso profissional.

Esta instituição está situada numa zona bastante apelativa, rodeada de espaços verdes, contando com um campus com cerca de dois hectares e meio. Os alunos têm ao seu dispor uma biblioteca, uma mediateca, um refeitório, um bar, um pavilhão gimnodesportivo, uma piscina e ainda campos desportivos. Muito próximo do centro de Lisboa, o ICE é frequentado por alunos de nível socioeconómico médio/alto, pelo que cerca de 55% das mães e 36% dos pais da turma em questão possuí um curso de ensino superior.

Analisando o projeto educativo, verifica-se que o ICE tem como objetivo “Inovar / Criar / Educar”, ou seja, promove o sucesso escolar, fomentando os valores cívicos. Aposta fortemente no desenvolvimento das componentes científicas, técnicas e socioculturais, adaptando as atividades letivas desenvolvidas às necessidades dos alunos.

A Escola tem uma ligação muito forte com os encarregados de educação para que estes estejam sempre a par do que acontece com o seu educando durante o seu tempo na instituição. Deste modo, cada aluno possui uma ficha de informação diária, que cada professor deve preencher, informando o encarregado de educação da sua situação escolar, nomeadamente da realização ou não dos trabalhos de casa e do seu comportamento. De igual forma, sempre que os encarregados de educação pretendem esclarecer alguma situação com o Diretor de Turma, entram facilmente em contacto com ele através de email.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma do 9.º ano em que realizei a minha prática de ensino supervisionada tem 24 alunos, dos quais 15 são rapazes e 9 são raparigas, sendo que todos frequentaram o 9.º ano pela primeira vez. As suas idades estão compreendidas entre os 13 e os 16 anos e estão representadas na figura 1.

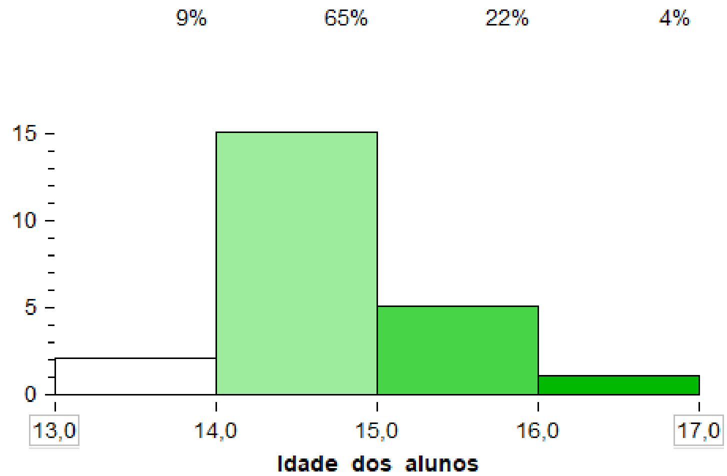


Figura 1 - Distribuição das idades dos alunos

Grande parte dos alunos apresenta dificuldades na disciplina de Matemática. Aparentemente, no ano letivo anterior, os alunos não tinham uma boa relação com a disciplina, tendo muitos alunos obtido nível dois na avaliação final realizada no 8.º ano, pelo que existem muitas dificuldades que provêm de anos anteriores.

Apesar de alguns alunos serem esforçados e trabalhadores, os professores admitem que outros são muito distraídos e pouco esforçados. Na opinião do conselho de turma, grande parte dos alunos apresenta mau comportamento, sendo pouco disciplinados. Ao longo do ano letivo vários alunos foram suspensos das atividades letivas diversas vezes por apresentarem mau comportamento.

No que diz respeito à assiduidade, não existem grandes problemas dado que as poucas faltas que existem são justificadas pelos encarregados de educação como situações de doença. Relativamente à participação, a turma é espontânea e participa ativamente quando é solicitado, criando até, por vezes, momentos de algum ruído.

Na turma existem três alunos com Necessidades Educativas Especiais. Um deles não requer adaptações curriculares, necessitando apenas que nos momentos de avaliação lhe seja lido o enunciado do teste. Os outros dois alunos necessitam de uma adaptação no seu processo de avaliação, tendo critérios especiais assim como um enunciado de teste também diferente, dadas as suas grandes dificuldades no processo de aprendizagem. Estes alunos têm muitas dificuldades em efetuar cálculos básicos e, portanto, necessitam de usar sempre a calculadora.

Na sala de aula, antes da minha intervenção letiva, os alunos realizavam o trabalho maioritariamente com os colegas que se sentavam ao seu lado, dada a organização da sala de aula em filas de duas ou três mesas. Esta disposição da sala permitia que os alunos esclarecessem muitas das suas dúvidas com os colegas do lado, mas, por sua vez, também facilitava alguma conversa paralela e causava alguma dispersão no decurso da aula. Considero que, desde o início do ano, os alunos foram melhorando este ponto apresentando um melhor comportamento aquando das minhas intervenções.

Relativamente às classificações obtidas ao longo do ano letivo, podemos verificar que a turma obteve no final do 1.º período cinco negativas, o que representa cerca de 21% dos alunos, como se poderá verificar na figura 2. A nota predominante neste período foi o nível três, existindo apenas dois alunos com nível quatro e um com nível cinco.

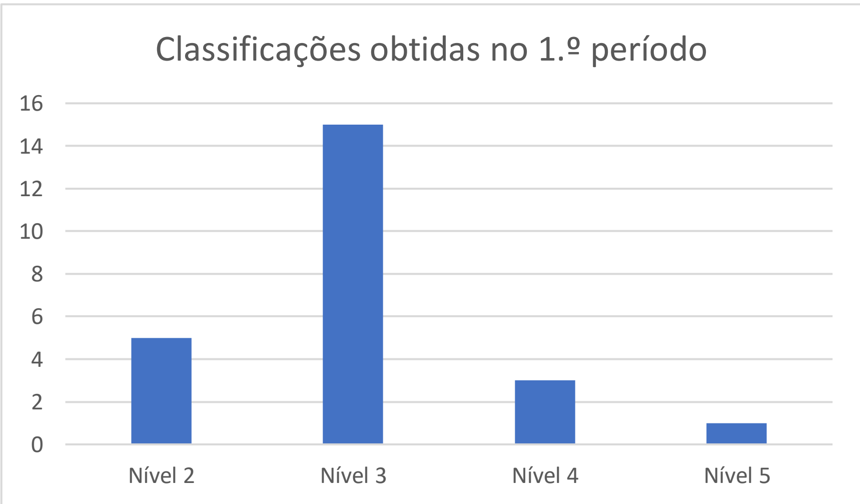


Figura 2 - Distribuição dos níveis obtidos à disciplina de Matemática no 1.º período

No 2.º período o panorama geral da turma manteve-se muito idêntico ao período anterior, continuando o nível três a ser o predominante nas classificações obtidas pelos alunos (Figura 3). Houve apenas um aluno de nível três que desceu para nível dois e uma aluna que subiu de nível três para nível quatro. Deste modo, no final do 2.º período cerca de 25% da turma obteve nível negativo na avaliação final.

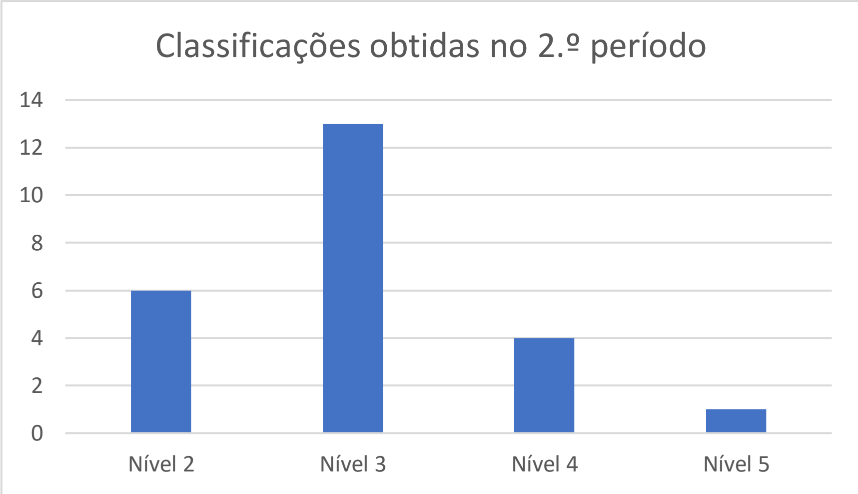


Figura 3 - Distribuição dos níveis obtidos à disciplina de Matemática no 2.º período

3.2. Ancoragem e organização da unidade de ensino

Este é o primeiro contacto formal, tal como já referi, que os alunos têm com as probabilidades. Os únicos conhecimentos que à partida possuem sobre este tema são intuitivos. No entanto, vários são os tópicos que os alunos devem dominar para conseguirem alcançar as metas propostas (Ministério da Educação e Ciência, 2013). Os alunos devem possuir domínio dos seguintes temas: números racionais, razões, conjuntos, reunião e interseção de conjuntos e estatística, nomeadamente tabelas de frequência.

O tema das probabilidades inicia-se, atualmente, no 9.º ano de escolaridade, abordando os conceitos de experiências deterministas e aleatórias; acontecimentos, nomeadamente, casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível; acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares; experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis; definição de Laplace de probabilidade; resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

A lecionação desta unidade contempla todos os tópicos presentes no Programa (Ministério da Educação e Ciência, 2013) referentes ao tema Probabilidades. No final desta unidade, os alunos deverão ser capazes de:

- Identificar uma "experiência" como um processo que conduz a um resultado pertencente a um conjunto previamente fixado designado por "universo dos resultados" ou "espaço amostral", não se dispondo de informação que permita excluir a possibilidade de ocorrência de qualquer desses resultados, designar os elementos do espaço amostral por "casos possíveis" e a experiência por "determinista" quando existe um único caso possível e "aleatória" em caso contrário.

- Designar por "acontecimento" qualquer subconjunto do universo dos resultados de uma experiência aleatória e os elementos de um acontecimento por "casos favoráveis" a esse acontecimento e utilizar a expressão "o acontecimento A ocorre" para significar que o resultado da experiência aleatória pertence ao conjunto A.
- Designar, dada uma experiência aleatória, o conjunto vazio por acontecimento "impossível", o universo dos resultados por acontecimento "certo", um acontecimento por "elementar" se existir apenas um caso que lhe seja favorável e por "composto" se existir mais do que um caso que lhe seja favorável.
- Designar dois acontecimentos por "incompatíveis" ou "disjuntos" quando a respetiva interseção for vazia e por "complementares" quando forem disjuntos e a respetiva reunião for igual ao espaço amostral.
- Descrever experiências aleatórias que possam ser repetidas mantendo um mesmo universo de resultados e construídas de modo a que se espere, num número significativo de repetições, que cada um dos casos possíveis ocorra aproximadamente com a mesma frequência e designar os acontecimentos elementares dessas experiências por "equiprováveis".
- Designar, dada uma experiência aleatória cujos casos possíveis sejam em número finito e equiprováveis, a "probabilidade" de um acontecimento como o quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, designar esta definição por "regra de Laplace" ou "definição de Laplace de probabilidade" e utilizar corretamente os termos "mais provável", "igualmente provável", "possível", "impossível" e "certo" aplicados, neste contexto, a acontecimentos.
- Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento, de entre os que estão associados a uma experiência aleatória cujos casos possíveis sejam em número finito e equiprováveis, é um número entre 0 e 1 e, nesse contexto, que é igual a 1 a soma das probabilidades de acontecimentos complementares.

- Justificar que se e forem acontecimentos disjuntos se tem $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Identificar e dar exemplos de acontecimentos possíveis, impossíveis, elementares, compostos, complementares, incompatíveis e associados a uma dada experiência aleatória.
- Utilizar tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore na resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação das probabilidades de diferentes acontecimentos compostos.
- Realizar experiências envolvendo a comparação das frequências relativas com as respetivas probabilidades de acontecimentos em experiências repetíveis (aleatórias), em casos em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.

(Ministério da Educação e Ciência, 2013)

A minha intervenção letiva teve início a 28 de fevereiro e terminou a 21 de março do presente ano, contemplando a lecionação de 6 aulas com a duração de 45 minutos e 5 aulas com duração de 90 minutos. No quadro 1 está representada uma planificação geral dos conteúdos abordados durante a minha intervenção letiva, bem como o tempo de lecionação e o momento de avaliação.

Quadro 1 - Planificação geral da intervenção letiva

Aula	Tópico da aula	Objetivo	Tarefas
Aula 1 (90 min) 28 de fevereiro	Linguagem da probabilidade	• Conhecer o significado de experiência, espaço amostral, casos possíveis, experiência determinista e experiência aleatória. • Identificar e classificar acontecimentos de uma experiência aleatória.	• Tarefa I
Aulas 2 (90 min) 1 de março	Acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares. Acontecimentos equiprováveis.	• Identificar acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares. • Identificar acontecimentos elementares equiprováveis.	• Manual • Tarefa "Estará Equilibrada?" – Parte I
Aula 3 (45 min) 5 de março	Acontecimentos equiprováveis. Conceito frequencista.	• Identificar acontecimentos elementares equiprováveis. • Calcular a probabilidade de um acontecimento recorrendo ao conceito frequencista.	• Tarefa "Estará Equilibrada?"
Aula 4 (45 min) 6 de março	Conceito frequencista.	• Calcular a probabilidade de um acontecimento recorrendo ao conceito frequencista. • Consolidação dos conhecimentos adquiridos na aula anterior.	• Manual
Aulas 5 (90 min) 7 de março	Regra de Laplace. Classificação de acontecimentos.	• Calcular a probabilidade de um acontecimento pela regra de Laplace. • Utilizar os termos "mais provável", "igualmente provável", "possível", "impossível" e "certo", através do resultado do cálculo da probabilidade.	• Tarefa "Batalha naval das probabilidades" • Manual

Aulas 6 (90 min) 8 de março	Regra de Laplace	• Consolidação de conhecimentos acerca da regra de Laplace.	• Livro do IAVE • Ficha de trabalho I
Aula 7 (45 min) 12 de março	Probabilidade em experiências compostas.	• Utilizar tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore na resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade e comparação das probabilidades de diferentes acontecimentos compostos.	• Ficha informativa
Aula 8 (45 min) 13 de março	Probabilidade em experiências compostas.	• Consolidação dos conhecimentos adquiridos na aula anterior.	• Ficha de trabalho II
Aula 9 (45 min) 19 de março	Propriedades da probabilidade.	• Reconhecer que $0 \leq P(A) \leq 1$ • Justificar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, sendo A e B acontecimentos disjuntos. • Reconhecer que a soma das probabilidades de acontecimentos complementares é igual a 1.	• Manual
Aula 10 (45 min) 20 de março	Propriedades da probabilidade	• Consolidação dos conhecimentos adquiridos na aula anterior.	• Manual
Aulas 11 (90 min) 21 de março	Resolução de exercícios. Ficha de avaliação sumativa.		

3.3. Conceitos fundamentais da unidade de ensino

Quando falamos em Probabilidade, falamos na quantificação de um grau de convicção. Todos nós desde pequenos usamos frequentemente termos como "mais provável", "impossível", "menos provável" para quantificar a incerteza/ certeza de determinada situação, no entanto são muitos aqueles que nunca contactaram formalmente com o termo "Probabilidade".

Experiências

Uma experiência em probabilidades é um processo que conduz a um resultado que pertence a um conjunto que é designado por "universo de resultados" ou por "espaço amostral" e representa-se habitualmente por Ω ou por E.

Os elementos do espaço amostral designam-se por "casos possíveis". Quando existe um único caso possível dizemos que estamos perante uma **experiência determinista**. Caso contrário dizemos que é uma **experiência aleatória**.

Acontecimentos

Um acontecimento é qualquer subconjunto do universo de resultados de uma experiência aleatória. Os elementos de um acontecimento dizem-se **casos favoráveis** ao acontecimento.

Diz-se que um acontecimento ocorre quando o resultado da experiência aleatória pertence a esse acontecimento.

Um acontecimento diz-se **certo** quando ocorre sempre, isto é, quando o conjunto dos casos favoráveis coincide com o universo de resultados. Por outro lado, um acontecimento diz-se **impossível** quando nunca ocorre e, desta forma, é o conjunto vazio. Dizemos ainda que estamos perante um acontecimento **elementar** quando existe apenas um caso que lhe seja favorável e um acontecimento **composto** quando existe mais do que um caso que lhe seja favorável.

Dados dois acontecimentos A e B de um espaço amostral E, dizemos que estes acontecimentos são **disjuntos** ou **incompatíveis** se a respetiva interseção for o conjunto vazio, isto é, se $A \cap B = \emptyset$. Caso contrário dizemos que são **compatíveis**.

Por outro lado, dois acontecimentos A e B de um espaço amostral E são **complementares** se são disjuntos e se a sua reunião for igual ao espaço de resultados:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset \ \wedge \ \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$$

O acontecimento complementar de A designa-se por $\bar{A}$.

Lei dos Grandes Números

Quando o número de repetições de uma determinada experiência aleatória é elevado, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se adota como probabilidade desse acontecimento. Deste modo, podemos afirmar que a probabilidade de um acontecimento A, representada por $\mathrm{P(A)}$, é o valor obtido para a frequência relativa com que se observou o acontecimento A, num grande número de realizações da mesma experiência aleatória.

Acontecimentos equiprováveis

Numa experiência aleatória dizemos que os acontecimentos elementares são **equiprováveis** quando ao fim de um número significativo de repetições cada um dos casos possíveis ocorre com aproximadamente a mesma frequência.

Definição de Laplace de probabilidade ou Regra de Laplace

Numa experiência aleatória num espaço amostral S, onde os casos possíveis sejam em número finito e os acontecimentos elementares sejam equiprováveis, a probabilidade de um determinado acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ \text{à}\ realização\ de\ A}{número\ total\ de\ casos\ possíveis}$$

A probabilidade pode representar-se na forma de fração, na forma de decimal ou na forma de percentagem.

Propriedades da Probabilidade

Tendo em conta a regra de Laplace, podemos afirmar que a probabilidade de um acontecimento impossível é zero, de um acontecimento certo é um e de um acontecimento possível está entre zero e um.

Assim, $0 \leq P(A) \leq 1$, ou ainda, $P(A) \epsilon$ [0,1].

Sejam A e B dois acontecimentos disjuntos. Tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

De facto, se o número total de casos possíveis é n, então:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{\#(A \cup B)}{\mathrm{n}} = \frac{\#A + \#B}{\mathrm{n}} = \frac{\#A}{\mathrm{n}} + \frac{\#B}{\mathrm{n}} = P(A) + P(B)$$

Em particular, se A é um acontecimento, tem-se que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Representação de acontecimentos e métodos de contagem

Para representar o espaço amostral e os acontecimentos associados a determinada experiência aleatória usamos muitas vezes diagramas de Venn e de Carroll.

Também usamos alguns esquemas facilitadores da contagem dos resultados possíveis associados a uma determinada experiência aleatória, nomeadamente o diagrama em árvore e a tabela de dupla entrada.

3.4. Estratégias de ensino

Considerando as características da turma em questão e tendo em conta a disposição dos lugares em sala de aula, os alunos trabalharam em diferentes modos, conforme as tarefas a realizar em sala de aula. Durante o 1.º período lecionei algumas aulas nesta turma e verifiquei que desenvolviam um bom trabalho com os colegas do lado, entreajudando-se uns aos outros, pelo que achei que seria uma boa opção metodológica optar pelo trabalho em grupo. Habitualmente os alunos trabalharam em díades e em grupos de quatro alunos (duas díades) formados previamente por mim, de acordo com a tarefa a realizar em sala de aula. Nunes (1996) considera que aparentemente o ideal será formar grupos com quatro alunos. Segundo o mesmo autor, a aprendizagem em pequenos grupos acarreta bastantes vantagens para o processo de ensino-aprendizagem, na medida em que os alunos se encontram num ambiente mais próximo e informal, facilitando a compreensão dos novos conteúdos.

> A aprendizagem cooperativa é geralmente entendida como sendo a aprendizagem que tem lugar num ambiente onde os alunos, em pequenos grupos, partilham ideias e trabalham de forma colaborativa para levarem a cabo tarefas académicas. (Davidson & Kroll, 1991 citados em Nunes, 1996, p.1)

Nunes (1996) acrescenta ainda que a investigação tem provado que o trabalho de grupo influencia, de modo positivo, o aproveitamento escolar dos alunos na disciplina de Matemática. Desta forma, aquando da formação dos grupos, tentei escolher alunos com diferentes níveis de resultados obtidos no teste diagnóstico. De igual modo, selecionei os elementos do grupo de forma a haver heterogeneidade quanto ao sexo. Claro que toda a seleção teve também em conta o comportamento habitual dos alunos em aula, de modo a evitar que se formassem grupos que se dispersassem no decurso do trabalho.

Para Veiga, Caldeira e Melo (2013) caso o professor se concentre num ensino particularmente expositivo, poderá atrair comportamentos indisciplinados e até algum desinteresse. Deste modo, os autores recomendam que a utilização de tecnologias na sala de aula torna o ensino mais interativo e satisfatório, promovendo a aprendizagem. Assim, para o desenvolvimento desta unidade, recorri a dois contextos, incluindo ou não o recurso à tecnologia. Como sugerido por Montes (2017), deve haver um equilíbrio entre a simulação recorrendo aos materiais manipuláveis e a simulação recorrendo à tecnologia, ambas muito úteis para o ensino deste tema. Para além do uso de materiais manipuláveis, usei o *Geogebra*, dado que é um software bastante intuitivo com que os alunos demonstraram gostar de trabalhar, numa primeira experiência no 1.º período. Efetivamente, a tecnologia pode auxiliar no processo de aprendizagem, assim como os materiais manipuláveis. Erickson (2006) considera que o uso da simulação torna os conceitos mais concretos para o aluno. Tendo em consideração as grandes dificuldades dos alunos, relatadas pela literatura, na compreensão dos conceitos de probabilidade, considerei que fosse importante uma abordagem recorrendo a estas simulações. Construí as *applets* no *Geogebra* de modo a que estas se tornassem apelativas para que os alunos se mantivessem motivados e interessados. As simulações recorrendo ao *Geogebra* foram usadas para promover a compreensão do conceito de probabilidade frequencista assim como para a perceção e confirmação de algumas propriedades das probabilidades.

A sala de aula onde os alunos costumam ter matemática não possui qualquer computador, no entanto, a escola tem uma mediateca que pode ser requisitada, dentro da disponibilidade existente. Esta sala não tem uma disposição vantajosa para trabalhar simultaneamente no computador e no quadro dado que muitos alunos ficam de costas para o mesmo. Desta forma, caso os alunos se voltem para o quadro deixam de ter um apoio para a escrita, o que torna esta tarefa muito complicada de gerir, levantando algum alarido na sala de aula. Por outro lado, nem todos os computadores estão em funcionamento não existindo um computador por cada par de alunos. Dadas estas circunstâncias, a mediateca foi apenas utilizada aquando da simulação do *Geogebra* para compreensão do conceito de probabilidade frequencista. Na aula em que era previsto usar a simulação no *Geogebra* para compreensão das propriedades da probabilidade, optei por projetar em sala de aula a simulação, analisando a mesma em grupo-turma.

As aulas que desenvolvi na minha intervenção letiva foram, essencialmente, de caráter exploratório. Este método de ensino promove a aprendizagem significativa através da construção dos seus conhecimentos (Canavarro, 2011). Essencialmente, as aulas de carácter exploratório caracterizam-se por serem centradas no aluno, no entanto, "a prática de um ensino exploratório da Matemática não implica necessariamente que os alunos estão no comando da aula a cada momento" (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012, p. 264). Estas aulas caracterizam-se ainda por, normalmente, três fases: uma primeira introdutória, onde é apresentada a tarefa aos alunos, uma segunda fase de exploração autónoma por parte dos alunos e, por fim, uma última fase de discussão e sistematização das ideias em grupo turma.

Este ensino é claramente benéfico para os alunos, apesar de exigir mais por parte do professor, uma vez que é necessário que este tenha boa capacidade para gerir e orientar as discussões matemáticas em sala de aula, para além de precisar "de interpretar e compreender como eles [os alunos] resolvem a tarefa (…) de modo a aproximar e articular (…) com aquilo que é esperado que aprendam" (Canavarro, 2011, p.11).

O ensino exploratório é um desafio não só para o professor como também para os alunos, principalmente quando não estão adaptados a este método, tal como refere Canavarro (2011):

> O ensino exploratório da Matemática precisa de tempo e de continuidade para que o professor possa melhorar e aperfeiçoar a sua prática, o mesmo tempo e continuidade que são necessários para que os alunos lhe correspondam e desenvolvam aquilo que ele proporciona: aprender conteúdos matemáticos mas também modos de produção do conhecimento matemático no contexto de uma comunidade da qual são parte integrante. É um desafio a perseguir de forma continuada por todos. (p.17)

Para colocar em prática este método de ensino, recorri a tarefas exploratórias assim como a problemas e exercícios. Considera-se que um problema "é uma dificuldade, não trivial que se pretende ultrapassar" (Santos & Ponte, 2002, p.30). Guimarães (2014) considera que:

> A experiência matemática, como qualquer outra experiência aliás, não se transmite. Cabe-nos como professores proporcionar condições para que os nossos alunos vivam, adquiram, desenvolvam essa experiência. Para que resolvam problemas, pois claro (p.1).

Desde o ano de 1977 que o NCTM considera que "a resolução de problemas é a principal razão para estudar matemática" (NCTM, 1977 citado em Vale, Pimentel, & Barbosa, 2015, p. 41), sendo esta ideia posteriormente corroborada nos documentos curriculares que lhe seguiram. Em Portugal, a resolução de problemas está presente nos currículos desde o ano de 1990, sendo que o atual Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2013) dá destaque a um ensino que promova a resolução de problemas desde cedo, alertando que para o 1.º ciclo a "escolha dos problemas deve atender-se ao número de passos necessários às resoluções, aumentando-se a respetiva complexidade ao longo do ciclo" (Ministério da Educação, 2013, p. 6). Dada a importância da resolução de problemas não só no ensino da matemática como também neste tópico em concreto e tendo em conta a grande dificuldade que estes alunos têm na resolução de problemas, considerei que fosse importante propor algumas tarefas desta natureza em sala de aula. Estamos conscientes que para um aluno uma tarefa pode ser um problema e, para outro, a mesma tarefa, poderá ser um exercício, estando esta classificação dependente do conhecimento que o aluno dispõe para resolver a questão (Ponte, 2005).

As tarefas exploratórias, de igual modo importantes no ensino da Matemática, permitem que o aluno possa começar a trabalhar imediatamente, apesar de não terem qualquer conhecimento acerca do conteúdo. Este tipo de tarefas não pressupõe um elevado grau de dificuldade, uma vez que se pretende que os alunos utilizem as suas intuições (Ponte, 2005).

No momento de construção das tarefas tentei incluir questões dos diversos níveis de dificuldade de modo a permitir que os alunos com algumas dificuldades não desmotivassem na exploração da tarefa.

3.5. As tarefas

3.5.1. Tarefa diagnóstico

Tal como referi anteriormente, a tarefa diagnóstico (Anexo 1.1) foi construída de modo a identificar os conhecimentos prévios dos alunos, relacionados com os tópicos de probabilidades a serem trabalhados em sala de aula.

A tarefa contém sete questões onde apenas a terceira e a quarta incluem duas alíneas: a primeira para resposta ao que é questionado e a segunda requer que o aluno explique o seu raciocínio.

A primeira questão aborda conceitos de estatística descritiva em que se pretende verificar se o aluno sabe calcular, relacionar e interpretar as frequências absolutas e relativas no contexto de um problema. Esta questão permite verificar os conhecimentos que os alunos têm acerca do conceito de frequência relativa, para posterior aplicação na unidade didática.

A segunda e terceira questões abordam os conceitos de acontecimento certo, possível e impossível, em que se tenciona averiguar se o aluno sabe reconhecer situações aleatórias que envolvam o conceito de acaso e vocabulário próprio para as descrever: "sempre", "algumas vezes" e "nunca". Ambas as questões envolvem bolas numa urna. No entanto, na questão 1 apenas é retirada uma bola do saco, enquanto na questão 2 são retiradas duas bolas do saco simultaneamente. Em ambas as questões existem alíneas com conectivos lógicos, dado que os alunos normalmente apresentam grandes dificuldades neste tópico.

A quarta e quinta questões têm como objetivo verificar se o aluno consegue interpretar situações que envolvem experiências simples. Ambas as questões envolvem novamente bolas numa urna. Na quarta questão temos dois sacos com o mesmo número de bolas em que as proporções são diferentes, enquanto que na quinta questão temos dois sacos com número de bolas diferentes em que as proporções das bolas de cada cor são iguais, independentemente do saco.

Por sua vez as duas últimas questões têm como objetivo verificar se o aluno é capaz de interpretar situações que envolvem experiências compostas. A sexta questão faz referência ao lançamento de dois dados, enquanto a sétima questão faz referência ao lançamento de duas moedas.

3.5.2. Tarefa I

A primeira sequência de tarefas (Anexo 1.2) foi construída de forma a introduzir os conceitos de experiência e conjunto de resultados, experiência aleatória e experiência determinista, acontecimento, casos possíveis e casos favoráveis e, por fim, a classificação de acontecimentos.

Partindo de situações conhecidas pelos alunos, na primeira parte da tarefa é solicitado que classifiquem cada situação em dois grupos, um em que é possível prever com exatidão o resultado da experiência e outro em que tal não é possível. Posteriormente, é solicitado que os alunos indiquem o conjunto de resultados que se pode obter em cada uma das situações. Esta questão tem como objetivo conduzir os alunos ao conceito de experiências deterministas e experiências aleatórias, universo de resultados e casos possíveis.

A segunda parte da tarefa foi construída de forma a incluir uma experiência de fácil compreensão para os alunos, envolvendo um saco com seis bolas numeradas, em que é retirada uma bola e registado o seu número. A primeira questão relativamente à experiência de extração de uma bola pretende consolidar o conceito de universo de resultados bem como introduzir os restantes tópicos a abordar na aula. Particularmente, a segunda, terceira, quarta, quinta e sexta questões, referentes à segunda parte da tarefa, têm como objetivo introduzir o conceito de acontecimento impossível, acontecimento certo, acontecimento elementar e acontecimento composto, respetivamente. Aproveitando estas questões, é possível introduzir igualmente o conceito de casos favoráveis.

3.5.3. Tarefa "Estará equilibrada?"

A segunda tarefa (Anexo 1.3) foi construída com o objetivo de introduzir o conceito de equiprobabilidade bem como o conceito frequencista de probabilidade. Esta tarefa foi dividida em duas partes: inicialmente os alunos partem de uma exploração recorrendo a uma moeda e, posteriormente, recorrem ao *software* de geometria dinâmica, o *Geogebra*, para explorarem a mesma situação. A tarefa foi elaborada de forma a captar a atenção dos alunos, motivando-os com o contexto do futebol.

Relativamente à primeira parte da tarefa, a primeira questão centra-se em compreender as conceções que os alunos têm relativamente à situação descrita, isto é, à probabilidade da face de uma moeda ficar voltada para cima ou para baixo quando é lançada. A segunda questão pressupõe que os alunos manifestem a sua opinião relativamente à afirmação realizada no enunciado, isto é, se a moeda considerada é viciada. Nenhuma das questões pressupõe que os alunos necessitem de conhecimentos prévios, baseando-se apenas nas suas intuições. Já a terceira questão envolve a experiência, por parte dos alunos, do lançamento de uma moeda ao ar. Posteriormente surgem três questões relativamente a esta experiência que tencionam orientar os alunos para a exploração dos dados que obtiveram anteriormente. Uma primeira alínea relativamente à opinião que tinham manifestado na primeira questão da tarefa, uma segunda alínea de cálculo de frequência relativa e, por fim, uma terceira alínea onde se questiona se a moeda é perfeita. A segunda alínea tem como objetivo levar o aluno a calcular a frequência relativa para, posteriormente, no momento de discussão em grupo-turma, conduzir os alunos ao conceito de probabilidade frequencista. No momento de discussão, a professora pode juntar o número de lançamentos relativamente a cada face, de cada grupo, para que se possa calcular a frequência relativa dos lançamentos realizados por toda a turma.

A segunda parte da tarefa, de exploração da *applet* no G*eogebra*, foi elaborada com o objetivo de os alunos poderem realizar um maior número de lançamentos e, posteriormente, calcularem as frequências relativas associadas a cada uma das faces da moeda, comparando-as. Na última questão da tarefa é solicitado aos alunos que apresentem uma resposta final relativamente à afirmação realizada no enunciado. Esta questão foi elaborada com o objetivo de os alunos responderem que não se podem tirar conclusões com tão poucos lançamentos. Paralelamente, pretende-se com estas questões introduzir aos alunos o conceito de acontecimentos elementares equiprováveis, dado que ambas as faces da moeda possuem a mesma probabilidade de sair.

3.5.4. Tarefa "Batalha naval das probabilidades"

A terceira tarefa (Anexo 1.4) foi adaptada de Montes (2017) e Manual Pi 9 (2017) com o objetivo de introduzir a regra de Laplace. A tarefa contabiliza seis questões que pretendem orientar o trabalho realizado pelo aluno.

No momento de introdução da tarefa é importante questionar se os alunos conhecem o jogo uma vez que é importante conhecer as regras para que não haja problemas de interpretação. Caso existam alunos que não dominem as regras, será importante o docente mostrar um tabuleiro de jogo assim como fazer uma síntese das regras.

A primeira e segunda questões da tarefa pretendem explorar as possibilidades (número de casos possíveis) que um jogador pode considerar para atacar o seu adversário, assim como os casos favoráveis a um determinado acontecimento. Paralelamente, no momento de discussão em grupo-turma, ambas as questões possibilitam introduzir a regra de Laplace.

A terceira e quarta questões têm como objetivo que o aluno compare duas situações distintas, aferindo qual delas apresentará maior probabilidade. As duas últimas questões relacionam-se também com a regra de Laplace, nomeadamente, o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Pretende-se com estas questões que os alunos façam uma ponte entre a fração do mar que está ocupada por cada um dos barcos e a probabilidade de acertar nesse mesmo barco.

3.5.5. Ficha de trabalho I

A ficha de trabalho (Anexo 1.5) foi adaptada do projeto das turmas piloto (2010/2011), com o objetivo de os alunos consolidarem os conhecimentos abordados até ao momento na unidade didática. A ficha de trabalho é constituída na totalidade por sete questões que tentam abordar diversas situações que envolvam os conceitos básicos de probabilidade.

Nas duas primeiras questões é solicitado aos alunos que construam um diagrama de Venn, dado que verifiquei que os alunos demonstraram ter dificuldades na sua construção e interpretação. Posteriormente, surgem diversas questões que permitem verificar, não só se o aluno consegue aplicar a regra de Laplace, como também consegue interpretar o diagrama de Venn. Nas alíneas 1.2.3. e 2.2. surge o conectivo lógico *não*, dado que foi uma dificuldade que verifiquei aquando da análise da tarefa diagnóstico.

Na terceira questão surge um diagrama de Carroll para que os alunos possam constatar que os dados podem ser apresentados de diversas formas, para que posteriormente se possa interpretar e responder às questões colocadas. A quarta questão tem como objetivo verificar se o aluno compreende o conceito de probabilidade, mesmo que esta esteja representada em notação científica. Nesta questão é necessário que os alunos saibam trabalhar com notação científica, dado que as probabilidades são apresentadas nesta forma.

Na quinta questão pretende-se verificar se os alunos compreenderam os conceitos de experiência determinista e experiência aleatória. Dado que estes conteúdos foram abordados numa altura muito inicial da intervenção letiva, esta questão surge de forma a verificar que os alunos não esqueceram este tópico.

Na sexta questão são fornecidos dados relativamente ao número de pessoas total, ao número de mulheres e é solicitado ao aluno que calcule a probabilidade de ser selecionado um homem. Esta questão foi introduzida na ficha de trabalho para verificar a interpretação que os alunos fazem do enunciado.

Na sétima e última questões, os alunos têm informação sobre um gráfico circular, sendo necessário retirar os elementos necessários para a descoberta do número de casos favoráveis. Esta questão, de nível de dificuldade mais elevado, foi introduzida não só de forma a compreender se os alunos sabem aplicar a regra de Laplace, como sobretudo permite verificar o modo como eles compreendem e interpretam o enunciado.

3.5.6. Ficha informativa

A ficha informativa (Anexo 1.6) foi elaborada com vista a auxiliar os alunos na construção do diagrama em árvore e da tabela de dupla entrada na aula. Partindo de uma experiência, pretende-se que os alunos compreendam que existem duas possibilidades que nos auxiliam na descoberta do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis a determinado acontecimento. Após esta situação mais simples em que se pode aplicar um dos dois esquemas auxiliares, surge um exemplo de aplicação em que é útil utilizar uma tabela de dupla entrada. Ao longo da ficha informativa surgem também diversas questões orientadoras ao trabalho realizado em sala de aula, solicitando que os alunos apliquem conhecimentos já adquiridos.

As questões orientadoras foram elaboradas de modo aos alunos aplicarem os conceitos de números primos e números compostos, dada a sua permanente dificuldade em compreender estes conceitos.

3.5.7. Ficha de trabalho II

A segunda ficha de trabalho (Anexo 1.7) foi organizada de modo a que os alunos pudessem aplicar os conhecimentos adquiridos na aula anterior, nomeadamente, a construção de tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore. Aquando da análise da tarefa diagnóstico verifiquei que os alunos apresentavam bastantes dificuldades na compreensão de experiências compostas, pelo que é crucial que este conteúdo fique bem consolidado.

A ficha é constituída por duas questões, cada uma contendo diversas alíneas. A primeira questão foi retirada do Exame Nacional de Matemática do 3.º ciclo do ano de 2017. A pergunta pode tornar-se mais complexa, uma vez que os dados surgem numa tabela e é necessário que o aluno interprete o enunciado. Na segunda questão, surge uma situação que foi trabalhada na aula anterior, isto é, a soma de dois dados cúbicos numerados de um a seis. Uma vez que a situação já é conhecida pelos alunos, é mais acessível para estes responderem às questões que se seguem. Depois de solicitar que os alunos apresentem o espaço amostral e classificassem os acontecimentos referidos, surge uma questão que requer que eles identifiquem o acontecimento associado a cada experiência. As experiências que se seguem estão relacionadas com a probabilidade da interseção de dois acontecimentos, questão que os alunos ainda não se depararam. Deste modo, é aconselhável que esta questão seja explorada em grupo-turma, para que se vão esclarecendo todas as dúvidas que surjam.

3.5.8. Tarefa "Entrevista"

A tarefa proposta para entrevista tem como objetivo compreender algumas das aprendizagens e dificuldades demonstradas pelos alunos. Deste modo, a tarefa está dividida em duas questões: a primeira com duas alíneas e a terceira com três alíneas.

Na primeira questão é suposto os alunos recorrerem à representação dos dados num diagrama de Venn para responder às duas questões propostas. Nestas alíneas os alunos têm de calcular o valor da probabilidade solicitada. Na questão 1.1 é solicitado que se calcule a probabilidade de um acontecimento, contendo o conectivo lógico *não*. Na questão 1.2 é solicitado que se calcule a probabilidade da união de dois acontecimentos.

A segunda questão foi colocada com o objetivo de motivar o raciocínio e não a mecanização de respostas. Deste modo, as três alíneas exigem interpretação por parte do aluno para que consiga responder. Na primeira alínea é solicitado que os alunos calculem o número de casos favoráveis, sabendo a probabilidade e o número de casos possíveis a um determinado acontecimento. A segunda alínea exige que o aluno se recorde da propriedade em que a soma de acontecimentos contrários é a unidade. Por fim, a última questão, exige que o aluno interprete o problema e consiga comparar duas probabilidades, identificando qual a relação entre elas.

3.6. A Avaliação

De acordo com o Despacho Normativo nº 66/2016, "A avaliação incide sobre as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos, tendo por referência os documentos curriculares em vigor". Deste modo, analisando o Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Básico, verificamos que o Ministério da Educação (2013) orienta a avaliação como uma regulação das aprendizagens que os alunos vão desenvolvendo, tendo por base o cumprimento das Metas Curriculares. Já o NCTM (1999) considera que:

> A avaliação é um processo de comunicação, no qual os avaliadores (…) aprendem algo sobre o que os alunos sabem e são capazes de fazer, e no qual os alunos aprendem algo sobre o que os avaliadores valorizam. (p. 15)

A avaliação formativa deve ser a "principal modalidade de avaliação" (Decreto Normativo nº66/2016) e como tal regular as aprendizagens dos alunos. Esta avaliação deverá ser contínua, sendo encarada "como um processo de acompanhamento do ensino e aprendizagem" (Santos, 2008, p. 13).

No início da minha intervenção, realizei uma tarefa diagnóstico com o objetivo de verificar as intuições que os alunos tinham acerca do conceito de "Probabilidade". Segundo o NCTM (1999), a avaliação que tenha um fim diagnóstico pretende compreender o que é que o aluno sabe sobre o conceito e quais os aspetos que lhe criam dificuldade.

Ao longo da minha intervenção letiva recorri a uma avaliação reguladora, destacando o uso do questionamento oral, realizado em sala de aula, aquando da realização das tarefas propostas e dos respetivos momentos de discussão das mesmas. Recorri também ao *feedback* escrito às produções dos alunos, com o objetivo de fornecer pistas para que os alunos possam reanalisar a sua resposta, evoluindo assim no seu processo de aprendizagem.

Dadas as características da avaliação decididas pelo grupo disciplinar de Matemática, foi realizada no final da intervenção letiva, uma ficha de avaliação com caráter sumativo. De acordo com o Despacho normativo nº66/2016, "a avaliação sumativa consubstancia um juízo global sobre as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos".

Dado que existem alunos na turma com Necessidades Educativas Especiais, como referi anteriormente, foi também necessário fazer uma adaptação ao seu processo de avaliação da unidade didática, "a avaliação deve refletir a Matemática que todos os alunos devem saber e ser capazes de fazer" (NCTM, 1999, p. 13). Deste modo, a ficha de avaliação foi adaptada de acordo com a prática do professor da turma, pelo que os critérios de avaliação foram também adaptados para estes alunos.

3.6.1. Ficha de avaliação

A ficha de avaliação (Anexo 1.8) foi elaborada para os alunos realizarem em cerca de 60 minutos. Na elaboração da ficha, houve o cuidado de tentar abordar o maior número de conceitos básicos de probabilidades.

Numa primeira questão, surge uma experiência composta em que é solicitado aos alunos o espaço de resultados e que, posteriormente, classifiquem três acontecimentos.

A segunda questão contempla quatro alíneas, sendo que na primeira surge o conceito de equiprobabilidade, associado a dois acontecimentos de uma experiência simples. Na segunda alínea é solicitado que os alunos calculem a probabilidade de alguns acontecimentos. Nesta questão previa-se que os alunos recorressem à regra de Laplace. Numa terceira alínea surge o conceito de probabilidade frequencista. Neste item previa-se que os alunos pudessem aplicar a Lei dos Grandes Números para calcular a probabilidade de obter a face com o número dois. Numa última alínea é novamente avaliado o conceito de equiprobabilidade, bem como o conceito de acontecimentos elementares.

Numa terceira questão pretende-se avaliar o conceito de acontecimentos incompatíveis. Através de uma pergunta de escolha múltipla, pretende-se verificar se o aluno domina esta noção.

Na penúltima questão, surge novamente uma experiência composta, idêntica às que foram trabalhadas em sala de aula, mas em que os dois dados são diferentes. Pretende-se verificar se os alunos compreenderam efetivamente como usar a tabela de dupla entrada ou se se trata apenas de um caso de memorização.

Por último, surge novamente uma questão associada a um diagrama de Venn. Na elaboração da ficha de avaliação foi decidido que seria importante contemplar um exercício com este tópico, dado que é essencial que os alunos consigam construir e interpretar este esquema, sem dificuldade.

3.7. Aulas lecionadas

3.7.1. Aula 1: 28 de fevereiro de 2018

Atendendo ao facto de os alunos apresentarem algumas ideias erróneas acerca do tema "Probabilidades", esta aula, de 90 minutos, foi planificada (Anexo 2.1) de forma a iniciar esta unidade questionando os alunos sobre situações em que utilizassem o termo "probabilidade" ou "mais provável" e "menos provável" no seu dia a dia. Posteriormente, forneci alguns exemplos aos alunos onde aplicamos estes conceitos no quotidiano, recorrendo a uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 3.1). Nesse momento consegui captar a atenção de diversos alunos, dado que coloquei um exemplo relacionado com futebol (um desporto praticado por grande parte da turma). Nesta introdução, chamei também a atenção para alguns erros que verifiquei que alguns alunos tinham cometido na tarefa diagnóstico, de modo que os alunos tomassem consciência dos mesmos.

A tarefa que propus aos alunos foi dividida em duas partes, uma primeira parte para os alunos compreenderem o conceito de experiência, nomeadamente experiência determinista e experiência aleatória. E uma segunda parte, para que os alunos compreendessem o conceito de acontecimento e a sua classificação.

Durante o primeiro momento de trabalho autónomo, muitos alunos mostraram alguma incerteza relativamente à noção de "prever com exatidão". Bruna afirmou que "prever com exatidão é ter quase a certeza daquilo que vai acontecer". Tal como Bruna, vários alunos solicitaram a minha ajuda para interpretar este conceito, que era necessário esclarecer para a resolução da tarefa. Ainda neste momento, vários alunos questionaram-me acerca da classificação da experiência C (atirar uma pedra ao rio e verificar se flutua ou se afunda). A dúvida acabou por surgir quando alguns alunos se recordaram das características do Mar Morto, dado que na disciplina de Física e Química a professora teria dado esse exemplo. Efetivamente não tinha previsto que os alunos tivessem dificuldades nesta alínea, considerando até que seria algo bastante simples. Este assunto foi discutido com alguns alunos que me iam questionando e, posteriormente, foi esclarecido para toda a turma no momento de discussão desta primeira parte.

Para introduzir a parte II da tarefa levei um saco com bolas numeradas de 1 a 6 e exemplifiquei a experiência descrita no enunciado. Creio que esta pequena demonstração ajudou muitos alunos a compreenderem a experiência, dado ser este um momento muito inicial e os alunos ainda tinham muitas dificuldades em visualizar a experiência que era realizada. Neste segundo momento de trabalho autónomo, os alunos compreenderam facilmente o que era pedido em cada questão, à exceção da quinta pergunta: "quantas possibilidades existem de sair uma bola com o número 1?". Muitos alunos responderam que existiam seis possibilidades, visto que a bola poderia sair à primeira extração, à segunda, etc. Para os ajudar a compreender a situação, emprestei o saco com as bolas a alguns grupos, para que pudessem explorar a situação e chegar à resposta certa. No entanto, outros grupos não tiveram oportunidade de fazer a experiência com o saco e as bolas, pelo que no momento de discussão alguns alunos não compreendiam o porquê de as possibilidades não serem seis. Este momento foi muito rico na discussão entre os grupos, sendo que os alunos acabaram por se entusiasmar bastante.

Na questão 6 da tarefa, vários grupos colocaram o número de possibilidades e não as possibilidades para o acontecimento "sair uma bola com um número superior a 4", pelo que foi importante ter chamado a atenção para a diferença entre as questões 5 e 6. No entanto, alguns grupos consideraram que o número de possibilidades se adequava à questão que era colocada. Esta dificuldade na compreensão do enunciado decorre da falta de atenção quando leem o mesmo.

Apesar de na planificação da aula não estar prevista a resolução de exercícios do manual, dado que ainda existia tempo, achei pertinente que os alunos resolvessem duas questões do manual (questão nº4 da página 157 e exercício nº1 da página 159) relativamente aos conceitos que foram abordados durante a aula. No momento de trabalho autónomo para resolução de ambos os exercícios, verifiquei que grande parte dos alunos não se recordava do conceito de "número primo", pelo que foi necessário recordar-lhes este conceito.

No geral, a aula decorreu como planeado e os alunos mostraram-se empenhados na exploração da tarefa bem como na discussão da mesma. Ao longo da aula, o meu papel foi essencialmente de apoiar e orientar os alunos na exploração da tarefa, esclarecendo eventuais dúvidas que surgissem. Posteriormente, no momento de discussão, o meu papel foi fundamentalmente de auxiliar os alunos na sistematização de conceitos.

3.7.2. Aula 2: 1 de março de 2018

Esta segunda aula (Anexo 2.2), de 90 minutos, teve início com uma breve introdução dos conceitos de acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares, recorrendo a uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 3.2). Para iniciar este momento, parti duma situação conhecida pelos alunos, nomeadamente o diagrama de Venn, de modo a poderem recordar esta representação que seria essencial para compreenderem o que daí advinha. Quando introduzi esta situação na sala de aula, reparei que o enunciado não estava totalmente explicito e poderia levantar algumas questões pelo que foi necessário acrescentar que todos os alunos da turma praticavam pelo menos uma modalidade. Posto isto, considerei que seria importante propor nas aulas seguintes mais exercícios com um Diagrama de Venn.

O facto de ter recorrido a uma apresentação *PowerPoint* para expor os conceitos tornou-se vantajoso para permitir uma melhor visualização por parte dos alunos, no entanto, verifiquei que teria sido benéfico ter um slide final de síntese com as diferenças e semelhanças entre os dois tipos de acontecimentos. Este slide teria permitido que os alunos conseguissem contrapor os dois conceitos.

O segundo momento da aula consistiu na resolução de dois exercícios do manual bastante acessíveis. A maioria dos grupos demonstrou dificuldades nas alíneas que envolviam os termos “número primo”, “quadrado perfeito” e “cubo perfeito”, tal como previsto na planificação. Quando sugeri a resolução dos dois exercícios, sugeri ainda outros dois exercícios extra para os alunos que tinham resolvido os primeiros mais rapidamente. Uma alínea de um destes exercícios acabou por ser resolvida em aula, visto que os alunos apresentaram algumas dificuldades em compreender a situação proposta na tarefa.

O último momento da aula foi dedicado à exploração da primeira parte da tarefa “Estará equilibrada?”. Para esta exploração solicitei aos alunos, na aula anterior, que trouxessem uma moeda de um euro por par de alunos. Este momento gerou uma certa agitação visto que os alunos ficaram muito empolgados em lançar a moeda e fazer apostas com os colegas.

Muitos alunos solicitaram a minha ajuda no momento de trabalho autónomo, nomeadamente na questão 3.3. (Achas que a moeda que utilizaste é perfeita ou esta privilegia uma face em relação a outra? Justifica a tua resposta.). A maioria das dúvidas estavam relacionadas com a justificação que poderiam dar, visto que a frequência relativa de cada face não era igual e, portanto, a moeda não seria perfeita (segundo a opinião de alguns alunos). Os alunos envolveram-se bastante em discussões relativamente a esta questão, tentando convencer os colegas da sua posição.

Considero que consegui gerir bem o tempo, conseguindo ainda uns minutos finais para dar indicações aos alunos sobre as aulas seguintes. No global a aula decorreu como esperado e os alunos pareceram compreender os novos conceitos que foram introduzidos. Esta aula foi também importante para clarificar as noções da aula anterior, dado que alguns alunos podiam ainda não os ter completamente consolidados.

3.7.3. Aula 3: 5 de março de 2018

Esta terceira aula (Anexo 2.3), com duração de 45 minutos, teve início com uma exploração de uma *applet* do *Geogebra* pelos alunos, com o objetivo de simularem o lançamento de uma moeda. Para que cada par tivesse acesso a um computador, a aula ocorreu na mediateca da escola. Esta sala dispõe de computadores e de uma tela para projetar conteúdos. Uma vez que existiam aulas antes desta, só pude preparar os computadores durante o intervalo, com duração de 15 minutos. Muitos computadores estavam desligados do cabo de alimentação, outros não dispunham de teclado ou rato, outros não tinham monitor e outro não carregava a *applet*. Deste modo, a aula começou ligeiramente mais tarde, acabando por um par usar o meu computador e dois pares de alunos se juntarem a outros dois pares de colegas, para que todos tivessem acesso à *applet*. Esta situação acabou por deixar dois grupos com quatro elementos, dificultando a participação e empenho de todos no momento de exploração da tarefa.

Depois dos problemas técnicos, a aula teve finalmente início e os alunos começaram a explorar a parte II da tarefa "Estará equilibrada?". Durante esta exploração foi necessário alertar os alunos para a importância de compararem as frequências relativas referentes a cada face da moeda. Aquando desta comparação, alguns alunos tentaram discutir com os outros pares para verificarem se os resultados eram idênticos.

Alguns alunos mostraram alguma dificuldade em responder à última questão da tarefa: "Após estas experiências, como responderias ao capitão da equipa do 9ºB?". Inicialmente responderam apenas "não tem razão", não tentando justificar e responder efetivamente à questão colocada, pelo que foi necessário intervir e solicitar que tivessem cuidado para o fazer.

Após a exploração, discuti com os alunos a parte I da tarefa, fazendo uma ponte com o que foi feito durante esta aula, na parte II, de modo a introduzir a Lei dos grandes números e os acontecimentos equiprováveis. Dado que se perdeu tempo na parte inicial da aula com os computadores, no momento de síntese não houve tempo para os alunos registarem no caderno diário os dois conceitos, pelo que foi necessário na aula seguinte entregar uma cópia do *PowerPoint* (Anexo 3.3) aos alunos.

Nesta aula senti-me bastante frustrada dado que previa usar os computadores da Mediateca pelo menos mais uma vez, mas não poderia ter a certeza do estado dos computadores com antecedência. Deste modo, tive de refletir e optar por outra alternativa para as aulas que tinha planeado.

3.7.4. Aula 4: 6 de março de 2018

A quarta aula (Anexo 2.4), com duração de 45 minutos, teve início com a proposta de resolução de exercícios do manual em pequenos grupos. Os alunos rapidamente aderiram à minha proposta de trabalho e começaram a discutir em grupo o enunciado dos exercícios. Quase instantaneamente comecei a ser solicitada pelos grupos para esclarecimento da minha primeira proposta de resolução. Quando verifiquei que vários grupos me estavam a chamar com dúvidas na compreensão do enunciado, optei por esclarecer o enunciado para toda a turma. Efetivamente, teria sido útil fazer uma pequena introdução, esclarecendo estas dúvidas de interpretação do primeiro exercício.

Durante o momento de trabalho autónomo os alunos frequentemente solicitaram a minha presença pelo que foi necessário que os outros professores presentes na aula auxiliassem os alunos nas suas dúvidas.

Dado que a aula foi de apenas 45 minutos, foi necessário começar a correção dos primeiros exercícios sem os alunos terem terminado a resolução de todos os que tinham sido propostos. Os alunos continuaram entusiasmados a resolverem os exercícios em grupo enquanto um dos colegas resolvia o exercício no quadro, apesar da minha chamada de atenção para a importância de estarem atentos. Foi assim necessário nas aulas seguintes distinguir estes momentos e pedir aos alunos para que suspendessem o que estavam a fazer de forma a prestarem atenção ao que era realizado no quadro.

No momento de correção do terceiro exercício proposto solicitei a um aluno que fosse resolver ao quadro, mas na verdade, o aluno apenas tinha discutido comigo a resolução pelo que, quando chegou ao quadro, voltou a escrever a tabela que estava no manual. De facto, devia ter intervindo, alertando o aluno que não seria necessário voltar a fazer a tabela, visto que se perdera algum tempo que poderia ter sido útil para a correção do exercício seguinte.

Quando solicitei aos alunos que resolvessem os exercícios no quadro, pedi que explicassem a sua resolução aos colegas, no entanto, poderia ter solicitado que justificassem pequenos detalhes da resolução. Assim, em próximas aulas tive especial atenção em solicitar mais justificações aos alunos.

No global a aula correu bem e os alunos conseguiram aplicar os conceitos aprendidos na aula anterior. Vários grupos não chegaram a resolver o último exercício proposto pelo que não foi corrigido em aula. Deste modo, solicitei aos alunos que terminassem este último exercício em casa para, caso existissem dúvidas, ser corrigido na aula seguinte.

3.7.5. **Aula 5:** 7 de março de 2018

A quinta aula (Anexo 2. 5), com duração de 90 minutos, teve início com a proposta da tarefa "Batalha naval das probabilidades". Para isso, questionei os alunos se conheciam o jogo, acabando por verificar que alguns alunos nunca tinham jogado nem conheciam as regras. Como tal, expliquei as regras gerais do jogo para a turma, no entanto, dois deles não compreenderam pelo que foi necessário explicar individualmente o funcionamento do jogo.

Durante a exploração da tarefa, os alunos tiveram dificuldades na compreensão da terceira questão: "Com o primeiro tiro, é mais provável acertar-se numa fragata ou num dos dois barcos de menores dimensões (submarino ou lancha de ataque)?". Efetivamente a questão não estava bem formulada e os alunos acabaram por interpretar o enunciado como qual seria o barco mais provável de acertar de entre os três referidos. Verificou-se que deveria estar "submarino e lancha de ataque" e não "submarino ou lancha de ataque", uma vez que pretendíamos a probabilidade dos dois barcos como um só. Esta questão foi esclarecida com os alunos para que todos pudessem interpretar a questão da mesma forma.

Ao longo da exploração verifiquei que grande parte dos alunos compreendeu a quinta questão "Que fração do mar está ocupada por cada um dos barcos?" como a fração do mar ocupada pelos barcos, ou seja, pelo conjunto da frota ($\frac{15}{100}$). Assim fui alertando os grupos à medida que verifiquei que os alunos cometiam esse erro.

A discussão da tarefa foi relativamente rápida dado que as dúvidas que foram surgindo durante a exploração da mesma foram imediatamente esclarecidas. Aproveitei a última questão para introduzir a Lei de Laplace, questionando os alunos sobre o número de casos possíveis referentes ao acontecimento "acertar no porta-aviões". Apercebi-me de que apesar da apresentação *PowerPoint* (Anexo 3.4) ser vantajosa nesta unidade, acaba por limitar a atividade do professor. Quando explorei com os alunos a Lei de Laplace, questionei-os também acerca dos valores que esta probabilidade poderia tomar, no entanto, estes valores não estavam registados na apresentação. Desta forma, decidi começar a aula seguinte alertando os alunos para a necessidade de acrescentarem estes valores na cópia dos slides desta mesma aula.

A aula seguiu com a proposta de resolução de exercícios do manual em pequenos grupos, à qual os alunos aderiram rapidamente. Nas duas questões propostas, os alunos apresentaram dificuldades na compreensão da questão nº6 que fui esclarecendo à medida que os grupos me solicitavam. Aqui teria sido vantajoso esclarecer o enunciado da tarefa oralmente para toda a turma. Alguns alunos rapidamente resolveram as questões que tinham sido propostas pelo que foi necessário sugerir mais alguns exercícios para que os alunos continuassem em atividade.

No momento de discussão da tarefa, apercebi-me que teria sido desnecessário um aluno deslocar-se ao quadro para corrigir a questão nº7, dado que as respostas eram muito simples e poderia ter sido corrigido oralmente em grupo-turma. Deste modo, nas aulas seguintes tive em atenção este aspeto, de forma a manter os alunos mais concentrados e tirarem partido da correção dos exercícios.

3.7.6. Aula 6: 8 de março de 2018

A sexta aula (Anexo 2.6), com duração de 90 minutos, teve início com a solicitação aos alunos para acrescentarem à cópia dos diapositivos os valores que a probabilidade pode tomar bem como as diferentes formas de representação da probabilidade (fração, decimal ou percentagem). Posteriormente, acrescentei uns diapositivos (Anexo 3.4) com a resolução das duas primeiras alíneas do exercício 1 da página 163 do manual, de forma aos alunos compreenderem como se apresenta a probabilidade de um acontecimento. Alguns alunos tiveram dificuldades em compreender que deveriam escrever sempre o acontecimento que estavam a considerar e não colocar apenas o valor da probabilidade. Neste exercício, nenhum aluno se recordava do que era um número composto, pelo que foi necessário rever este conceito, tal como previsto na planificação.

Depois da resolução das alíneas do exercício 1, sugeri exercícios do livro do IAVE para os alunos resolverem em pequenos grupos. Inicialmente tinha previsto os alunos resolverem os mesmos exercícios numa folha à parte, no entanto, quando solicitei na aula que o fizessem, vários alunos afirmaram que não tinham folhas e apenas caderno. Como não tinha previsto que tal fosse acontecer, não levei folhas para entregar aos alunos. Desta forma, pedi que me fosse entregue uma resolução por grupo para que pudesse recolher alguma informação para analisar.

Grande parte dos alunos apresentou dificuldades na resolução do exercício 6. A verdade é que os alunos não compreenderam adequadamente a experiência, e erraram as probabilidades pedidas. À medida que verifiquei que os alunos cometiam este erro, questionei-os acerca de quais as vogais que existiam no saco e quantas peças com cada vogal existiam, desta forma os alunos compreenderam o erro que tinham cometido.

Durante o momento de trabalho autónomo dos alunos, fui auxiliando os grupos que me chamavam, acabando por verificar as resoluções dos exercícios que iam fazendo. Deste modo, optei por realizar uma discussão oralmente para que os alunos não dispersassem tal como acontecia quando um colega ia resolver um exercício ao quadro, como sucedeu em aulas anteriores. Fui percorrendo os grupos para que todos pudessem participar e contribuir para este momento, de facto verifiquei que os alunos se mantiveram mais atentos à discussão das respostas dos exercícios. Na discussão da resolução do primeiro exercício proposto, deveria ter questionado a aluna se caso o dia de aniversário fosse, por exemplo, no dia 2 de março, se a probabilidade se manteria a mesma. Esta questão seria para verificar se a aluna teria justificado que o número de casos favoráveis seria 1 por ser no dia 1 de março ou por ser um dia, independentemente do dia do mês.

No final da aula recolhi as resoluções por grupo e entreguei uma ficha de trabalho para que fizessem durante o fim-de-semana e me a entregassem na segunda-feira de forma a poder dar feedback e devolver no dia seguinte aos alunos.

3.7.7. Aula 7: 12 de março de 2018

A sétima aula (Anexo 2.7), com duração de 45 minutos, teve início com a exploração de experiências compostas. Para isso, construi uma ficha informativa para que os alunos pudessem acompanhar e preencher o que faltava ao longo da aula. Quando abordei o primeiro exemplo em que se usou a tabela de dupla entrada, um aluno questionou de imediato se podíamos usar a tabela para uma multiplicação. Achei interessante esta intervenção, demonstrando interesse e perspicácia. Expliquei que de seguida iriamos explorar uma situação que não estava relacionada com a multiplicação, mas sim com outra operação, a soma.

Os alunos demonstraram compreender que frequentemente é útil usarmos o diagrama em árvore e a tabela de dupla entrada como um auxiliar para descobrir os casos possíveis e casos favoráveis.

O segundo exercício que propus explorar em grupo turma, envolvia um dado. Por sugestão do Professor cooperante em aulas anteriores, questionei os alunos se um dado teria de ter as seis faces como frequentemente o conhecemos. Uma aluna respondeu rapidamente que não, que também poderia ter quatro faces, neste caso triangulares. Acrescentei ainda que os dados poderiam ter muito mais faces, reforçando que não existem apenas dados cúbicos nem triangulares.

Na exploração do segundo exercício surgiu uma questão que solicitou que os alunos classificassem acontecimentos e, alguns alunos mostraram dificuldades em se recordarem dos conceitos envolvidos. Esta dificuldade demonstrada permitiu-me verificar que os alunos deixaram de dar importância a estes conceitos básicos abordados na parte inicial da unidade didática. Deste modo, foi essencial rever a classificação de acontecimentos que já tinha sido abordada, solicitando aos alunos que me dissessem que acontecimentos conheciam e o porquê de os classificarmos dessa forma.

Nesta aula recolhi a resolução do trabalho de casa (ficha de trabalho) da aula anterior para poder dar feedback aos alunos. Nesse momento verifiquei que apenas metade da turma tinha realizado efetivamente o trabalho de casa. Salientei a importância da resolução da ficha, dando a oportunidade para que os alunos a pudessem trazer na aula seguinte.

3.7.8. Aula 8: 13 de março de 2018

No início da oitava aula (Anexo 2.8), com duração de 45 minutos, questionei os alunos acerca da realização do trabalho de casa (questões nº 10 e 11 das páginas 170 e 171 do manual). Na aula anterior tinha sugerido aos alunos que respondessem a essas questões numa folha à parte para que ficasse com dados das suas resoluções e as pudesse corrigir de forma a verificar todos os erros que os alunos cometem habitualmente na resolução de exercícios. Apenas cerca de 60% dos alunos fez o trabalho de casa, como tal não foi possível compreender as dificuldades que os restantes alunos eventualmente tivessem nessas questões. Na aula anterior alertei os alunos para a necessidade e importância de me entregarem as resoluções que peço, no entanto alguns continuaram sem me entregar qualquer resolução.

Posteriormente dei início à resolução de uma ficha de trabalho acerca das experiências compostas. Rapidamente verifiquei que a maioria dos grupos apresentava muitas dificuldades em construir o diagrama em árvore, pelo que tomei a decisão de alertar a turma para o erro que estavam a cometer na construção deste esquema, acabando por corrigir este primeiro exercício. De seguida, pedi aos alunos para resolverem o segundo exercício, alertando que na questão 2.2. deveriam definir os acontecimentos em extensão, algo que certamente levantaria imensas dúvidas por parte dos alunos.

Na exploração da segunda questão, alguns alunos verificaram que na aula anterior tínhamos trabalhado uma situação idêntica, pelo que podiam aproveitar a construção dessa tabela para responder às questões que eram solicitadas. No entanto, a questão 2.2. levantou algumas dúvidas por parte dos alunos dado que não compreendiam a interseção de dois acontecimentos, tal como não se recordavam do conceito de acontecimento complementar. Em grupo turma esclareci com os alunos estes conceitos que, aparentemente, não estavam ainda bem consolidados.

Nos últimos minutos da aula esclareci com os alunos como se construíam Diagramas de Venn dado que a maioria dos alunos não o conseguiu construir corretamente na ficha de trabalho que tinham resolvido como trabalho de casa. Verifiquei que os alunos apresentavam dúvidas de como "descobrir" o valor da probabilidade da interseção de dois acontecimentos.

Terminei a aula informando os alunos de quais os exercícios que poderiam fazer do manual e do livro do IAVE para praticarem e consolidarem os conhecimentos abordados até ao momento acerca da unidade didática.

3.7.9. Aula 9: 19 de março de 2018

A nona aula (Anexo 2.9), com duração de 45 minutos, teve início com a proposta de resolução da atividade inicial sugerida pelo manual. Como esta tarefa se tornaria muito extensa, projetei no *PowerPoint* as alíneas que os alunos deveriam responder bem como algumas questões orientadoras que deveriam ter particular atenção ao longo da sua exploração. Os alunos rapidamente iniciaram o trabalho, no entanto, demoraram mais tempo do que previ no momento de trabalho autónomo.

Durante a exploração dos alunos, auxiliei-os e orientei-os de modo a ultrapassarem as suas dificuldades, tal como previsto na planificação. Grande parte dos alunos demonstrou dificuldades em definir em extensão a união e interseção de dois acontecimentos. Efetivamente, era uma dificuldade prevista, no entanto, como esta questão foi trabalhada na aula anterior, considerei que não levantasse muitas dificuldades. Relativamente à alínea onde era solicitado que definissem em extensão o conjunto $C \cup D$, percebi que alguns alunos estavam a confundir a união dos dois acontecimentos com a união de intervalos de números reais, pelo que foi necessário esclarecer-lhes esta dúvida.

Outra grande dificuldade dos alunos estava relacionada com os conceitos de "números primos" e "múltiplos". Apesar de em grande parte das aulas lecionadas surgirem questões relacionadas com os conceitos mencionados, os alunos continuavam a ter dificuldades em identificar os números primos.

Quando verifiquei que grande parte dos alunos já estava quase a terminar a exploração, iniciei a discussão em grupo-turma, recorrendo a uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 3.5). Os alunos compreenderam facilmente as relações que se estabeleceram, no entanto, quando fiz um exercício de exemplificação, estes ainda demonstraram algumas dificuldades na aplicação das propriedades. Alguns alunos apresentaram dificuldades em compreender o valor de $P(A \cap B)$ do exemplo que apresentei. Os alunos não se recordavam da definição de acontecimentos incompatíveis, o que fez com que apresentassem dificuldades em compreender o valor da probabilidade pedida.

Como o momento de trabalho autónomo dos alunos se estendeu durante mais algum tempo, optei por não explorar a *applet* do *Geogebra* com os alunos nesta aula, iniciando a aula seguinte com este tópico. Terminei a aula solicitando aos alunos que resolvessem o trabalho de casa numa folha à parte para me entregarem.

3.7.10. Aula 10: 20 de março de 2018

Tendo em conta que na aula anterior não tinha surgido oportunidade de explorar a *applet* do *Geogebra* no que diz respeito às propriedades da probabilidade, iniciei esta aula (Anexo 2.10), de 45 minutos, com este momento. Os alunos rapidamente associaram as propriedades estabelecidas na aula anterior com a simulação realizada no *Geogebra*. Quando a probabilidade do acontecimento A e do acontecimento B tomavam ambas o valor de 0,5 os alunos colocaram imensas questões acerca da probabilidade da interseção, revelando interesse e curiosidade em saber mais acerca destas propriedades.

Após o momento de exploração no *Geogebra*, solicitei aos alunos que me entregassem o trabalho de casa. Mais uma vez, grande parte dos alunos não me entregou a resolução dos exercícios.

Posteriormente, propus a resolução de dois exercícios do manual, ambos com um nível de dificuldade mais elevado do que o que tinha sido feito até ao momento. Deste modo, o momento de trabalho autónomo dos alunos exigiu que a minha colega de estágio ajudasse a esclarecer todas as dúvidas que os alunos tinham. A maioria dos alunos apresentou dificuldades na compreensão da alínea b) da questão 3.1., dado que era solicitada a probabilidade da união de três acontecimentos. A alínea e) da questão 4.2. foi também das que mais dificuldades levantou aos alunos, uma vez que se pedia a probabilidade da união do acontecimento complementar de A com o acontecimento B.

No final da aula alertei os alunos que no dia seguinte seria feita, tal como teria sido avisado anteriormente, a ficha de avaliação referente à unidade didática "Probabilidades".

3.7.11. Aula 11: 21 de março de 2018

O início da última aula lecionada (Anexo 2.11), com duração de 90 minutos, foi dedicado à resolução de exercícios que permitiram esclarecer algumas dúvidas por parte dos alunos. Posteriormente, os alunos realizaram uma ficha de avaliação sumativa (Anexo 1.8), tal como estava planificado. Esta ficha pretendia avaliar apenas tópicos relativos à unidade de ensino "Probabilidades".

Capítulo 4

Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo são apresentadas as opções metodológicas, a caracterização dos participantes do estudo de cariz investigativo desenvolvido com a turma do 9.º ano de escolaridade, os métodos de recolha de dados assim como o processo de análise dos mesmos. Para a escolha dos métodos adequados, foi necessário ter presente o objetivo do trabalho de cariz investigativo assim como as questões do estudo, enumeradas no Capítulo 1.

4.1. Opções metodológicas

O principal objetivo do meu estudo é analisar as aprendizagens realizadas por alunos do 9.º ano na unidade de ensino "Probabilidades". Coutinho (2004) afirma que "o [que] deve determinar a opção metodológica do investigador não será a adesão a uma ou outra metodologia, a um ou outro paradigma, mas o problema a analisar" (p.444), assim, dadas as particularidades deste estudo, que se centra na interpretação das aprendizagens dos alunos, segui uma metodologia de investigação qualitativa de natureza interpretativa.

Guba (1990, citado por Aires, 2011) considera que o paradigma interpretativo orienta a ação. Este paradigma, de tendência naturalista e de pequena escala, envolve alguma subjetividade, uma vez que pressupõe o envolvimento pessoal do investigador.

Na investigação qualitativa "a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (Bogdan e Biklen, 1994, p.47). O autor acrescenta ainda que esta metodologia é descritiva sendo que os investigadores nesta abordagem interessam-se, principalmente, pelo processo e não apenas pelo resultado final, sendo esta a principal característica desta metodologia. Neste tipo de abordagem, os investigadores não tencionam provar ou refutar pressupostos, mas sim construir as suas próprias teorias à medida que vão analisando os dados, "o significado é de importância vital" (Bogdan e Biklen, 1994, p.50).

4.2. Participantes no estudo

Para a realização do trabalho de cariz investigativo selecionei alguns alunos em particular, dado que é complexo analisar a aprendizagem revelada pelos 24 alunos da turma sobre os conceitos em estudo, no período limitado de tempo em que a unidade decorreu. Para Aires (2011), esta seleção deve ter "por objetivos (…) a máxima informação possível para a fundamentação do projeto de pesquisa e criar uma teoria" (p.22). Assim sendo, escolhi quatro alunos, recorrendo aos seguintes critérios: apresentar interesse em participar na investigação; apresentar boa comunicação (para maximizar os dados recolhidos) e heterogeneidade relativamente aos resultados obtidos na ficha diagnóstico. Posteriormente agrupei estes quatro alunos em pares, de forma a que a cada par da investigação se juntasse outro par de alunos da turma, de modo a maximizar os dados obtidos.

- Bruna e Telmo, de 15 e 14 anos respetivamente, são um par heterogéneo relativamente aos resultados obtidos na tarefa diagnóstico. A Bruna é uma aluna com grandes dificuldades na disciplina de Matemática, distraindo-se muito facilmente nas aulas. Bruna obteve nível 2 nos dois primeiros períodos do ano letivo. Relativamente à tarefa diagnóstico, Bruna apresentou justificação à maioria das respostas, apesar de não ter as ideias mais acertadas acerca do conceito de probabilidade. Por sua vez, Telmo, é um aluno calmo, trabalhador e empenhado, que aproveita as suas capacidades para daí obter algum benefício, sendo um aluno que poderá conseguir fazer ainda melhor. Telmo obteve a classificação 4 nos dois primeiros períodos do ano letivo à disciplina de Matemática sendo que na tarefa diagnóstico apresentou um uma justificação a todas as questões, bem como ideias adequadas acerca do tema das probabilidades.
- Soraia e Paulo, ambos de 14 anos, são alunos com resultados medianos. A Soraia, uma das alunas mais trabalhadoras da turma, iniciou o ano com nível 3 à disciplina de Matemática, obtendo nível 4 no 2.º período do ano letivo. Paulo é um aluno que se distrai facilmente, não aproveitando as suas capacidades para obter melhor rendimento na disciplina de Matemática. Desde o início do ano que Paulo obteve nível 3 à disciplina. Ambos os alunos justificaram a maioria das respostas na tarefa diagnóstico, assim como níveis medianos relativamente às intuições do conceito de probabilidade.

Ao longo da intervenção letiva, Bruna não entregou vários elementos cruciais para a análise de dados, assim sendo, não será possível analisar o progresso desta aluna relativamente às aprendizagens realizadas na unidade de ensino.

Creswell (2012) considera que qualquer recolha de dados com pessoas implica práticas éticas que são inerentes a qualquer investigação em Educação. Desta forma, estou consciente que primeiramente é crucial respeitar os direitos dos participantes na investigação. Neste sentido, procurei respeitar os cuidados éticos (IEUL, 2016).

Dado que a turma participou num projeto do Instituto de Educação durante o 1.º período letivo, foi necessário obter autorizações para a recolha de dados logo no início do ano letivo. Assim, para respeitar as questões de ordem ética, enderecei uma autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma (Anexo 4), clarificando os objetivos do estudo e os métodos de recolha de dados, assim como assumindo a garantia de privacidade e do anonimato dos alunos envolvidos. Obtive, assim, a aprovação de todos os encarregados de educação para que os educandos participassem no estudo.

A confidencialidade e privacidade são aspetos que é importante ter em atenção de forma a serem respeitados. É essencial proteger a informação obtida no decorrer da investigação, mantendo o anonimato dos alunos. Como tal, utilizarei nomes fictícios sempre que referir um aluno ao longo da análise de dados da investigação, procurando também não fornecer demasiada informação sobre o aluno para minimizar a possibilidade de este vir a ser reconhecido.

4.3. Métodos de recolha de dados

Para a concretização deste estudo foi importante que se procedesse à recolha de dados que são imprescindíveis para a análise, com vista a responder ao objetivo e questões de investigação. Assim, recorri aos seguintes métodos de recolha de dados: observação, recolha documental e entrevista.

4.3.1. Observação

Uma das técnicas mais usuais de pesquisa é a observação, sendo esta considerada uma ferramenta preponderante na investigação (Aires, 2011). Estando consciente que este método não é fácil e uma vez que não tinha possibilidade de fazer registos no decorrer da aula, por estar centrada no meu papel enquanto professora, recorri a um diário de bordo. Este registo permitiu-me anotar pequenas observações que fiz durante as aulas, as dificuldades e reflexões no percurso da investigação. Bogdan e Biklen (1994) consideram que é essencial que o observador crie uma empatia e uma relação de proximidade com os participantes, uma vez que será mais fácil recolher dados nesta situação. Dado que a minha interação com a turma decorreu desde o início do ano letivo, esta empatia já estava, à partida, garantida. Aires (2011) aponta a subjetividade como uma desvantagem na utilização deste método de recolha de dados, visto que está dependente de sentimentos e juízos do investigador.

A observação que decorreu neste estudo é naturalista, visto que se pretende relatar o que acontece recorrendo a narrativas detalhadas. Este tipo de observação é característica da observação participante (Aires, 2011).

Durante o momento de intervenção da prática letiva realizei o registo de áudio e vídeo para me auxiliar na análise de pequenos episódios da aula bem como para refletir sobre a minha prática profissional. O registo de áudio focou-se apenas nos quatro participantes do estudo. Por sua vez, o registo de vídeo incidiu sobre os momentos de trabalho coletivo. Este método permite captar diversos acontecimentos que decorrem em simultâneo e que muitas vezes o investigador não tem noção da sua ocorrência. Estou consciente que o registo de vídeo pode tornar-se bastante intimidatório para os alunos, mas estes já se encontravam acostumados a esta prática desde o 1.º período letivo, pela participação da turma num projeto de investigação do Instituto de Educação. Aquando da minha intervenção letiva, notei alguma resistência dos participantes relativamente à gravação de áudio, visto que este método foi, sem dúvida, novo para eles.

4.3.2. Recolha documental

Este método de recolha de dados é uma valiosa fonte de informação na pesquisa qualitativa. É um procedimento de fácil acesso, não exigindo nenhum treino específico para a sua recolha. Dado que o tempo para a realização deste estudo foi reduzido, a recolha documental tornou-se uma vantagem por não ser necessária qualquer transcrição como no caso das entrevistas (Creswell, 2012).

No início do mês de fevereiro, antes do início da unidade de ensino, apliquei uma tarefa diagnóstico a todos os alunos da turma (apresentada no capítulo anterior), de modo a verificar as suas intuições relativamente ao tópico em questão, auxiliando-me no planeamento e condução das aulas que lecionei. Os dados recolhidos forneceram-me informações importantes para o estudo.

Posteriormente, também recolhi resoluções dos alunos do trabalho realizado em sala de aula, bem como do que realizaram em casa. Por fim, recolhi ainda a resolução da ficha de avaliação realizada, de igual forma, individual.

A recolha documental permitiu-me ter acesso às estratégias e representações utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas, bem como as possíveis dificuldades que os alunos pudessem ter. Esta recolha foi essencial dado que é muito complexo acompanhar todos os alunos no momento de trabalho autónomo. No entanto, este método poderá revelar algumas limitações quanto ao acesso do investigador às perspetivas e explicações dos participantes.

Quando no 1.º período recolhi as resoluções dos alunos, estes sentiram necessidade de ter as respetivas resoluções para os apoiar no estudo, posteriormente à aula. Por isso, após cada aula, digitalizei as resoluções dos alunos das tarefas realizadas em sala de aula, para devolver rapidamente os documentos aos mesmos.

4.3.3. Entrevista

A entrevista é outro dos métodos mais importantes no decorrer de uma investigação. Para Bogdan e Biklen (1994), as entrevistas podem ser usadas de duas formas na investigação qualitativa: "Podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas" (p. 134). Neste estudo apliquei as entrevistas não como um procedimento único, mas sim juntamente com os outros métodos de recolha de dados.

Uma entrevista, seja ela de que natureza for, implica sempre que haja comunicação entre o entrevistador e o entrevistado (Aires, 2011). Assim sendo, é necessário que exista uma empatia, entre estes dois atores, para que o entrevistador consiga obter o máximo de informação que pretende por parte do entrevistado, como tal a entrevista não deve constituir "uma situação de interrogatório mas uma situação de "confissão" onde o que se pede ao entrevistado é confidência" (Aires, 2011, p.33).

Após a minha intervenção letiva realizei uma entrevista individual, com os participantes do estudo, de modo a verificar algumas estratégias, aprendizagens e dificuldades que os alunos pudessem ter desenvolvido durante a unidade didática.

As entrevistas foram desenvolvidas, no dia 22 de março, num momento previamente acordado com o professor cooperante e com os alunos. Antes da realização das entrevistas, confirmei novamente com os participantes se teriam disponibilidade para participar na entrevista com duração de 30 minutos.

Os alunos mostraram-se rapidamente disponíveis para participar, não parecendo sentir-se inibidos pela situação. No entanto, dado que tinham recebido a ficha de avaliação realizada na aula anterior, um dos alunos sentia-se desmotivado e desgostoso dada a nota obtida na avaliação, pelo que tive algum receio que o aluno não desenvolvesse a sua argumentação ao longo da entrevista.

Apesar da tarefa realizada ser individual, a entrevista foi realizada aos pares, questionando-os acerca das suas resoluções. Ao longo da entrevista houve registo de áudio para, posteriormente, poder analisar todas as justificações dadas pelos alunos.

As entrevistas, do tipo clínico (Hunting, 1997), foram semi-estruturadas, visto que tive um guião (Anexo 1.10) que me apoiou, mas que paralelamente poderia sofrer algumas alterações no decorrer das mesmas. Dada a natureza desta entrevista, é necessário que o entrevistador, neste caso o investigador, tenha uma grande destreza a conduzir a mesma. É crucial que dê a devida atenção ao entrevistado, comunicando com ele para que sinta que estamos efetivamente a ouvi-lo.

4.4. Processo de análise de dados

Para responder às questões colocadas inicialmente aquando da definição do objetivo deste estudo, é crucial que exista uma análise dos dados recolhidos na intervenção letiva. A análise dos documentos recolhidos foi completada com os dados provenientes dos registos de áudio e vídeo realizados.

Ao longo da intervenção letiva guardei as digitalizações das resoluções das tarefas dos alunos, assim como o registo áudio e vídeo das aulas. Posteriormente, organizei as resoluções escritas dos alunos por tópico a ser analisado. Deste modo, considerei três categorias de análise de conceitos de probabilidade, adaptadas de Montes (2017), sintetizadas no quadro 2:

Quadro 2 - Categorias de análise de dados

Categoria	**Descrição**
Conceitos associados à aleatoriedade	-Experiências relacionadas com o acaso -Experiências aleatórias e experiências deterministas
Conceitos associados ao espaço amostral	-Acontecimentos, casos favoráveis e casos possíveis -Acontecimentos certos, impossíveis, possíveis, compostos e elementares -Acontecimentos complementares, incompatíveis e equiprováveis -Representações no cálculo de probabilidades envolvendo acontecimentos compostos
Conceito de probabilidade	-Probabilidade frequencista -Probabilidade clássica (Regra de Laplace)

Recorrendo ao quadro 2, tentei identificar as aprendizagens e dificuldades dos participantes, relativamente à unidade de ensino “Probabilidades”. A análise das produções escritas dos alunos foi realizada de forma cronológica, com vista a identificar a existência, ou não, de uma evolução nas aprendizagens dos alunos.

Capítulo 5

Análise de Dados

Neste capítulo apresento a análise dos dados recolhidos ao longo da minha intervenção letiva, com o objetivo de dar resposta às questões do estudo formuladas inicialmente. Esta análise pretende identificar as aprendizagens e as dificuldades evidenciadas pelos alunos relativamente aos conceitos básicos de Probabilidade, indicados no objetivo do estudo. Inicialmente começo por apresentar alguns resultados da turma, na tarefa diagnóstica, relativamente aos conceitos considerados. Posteriormente, centrar-me-ei na análise detalhada das resoluções dos participantes ao longo das tarefas propostas nas aulas e da entrevista realizada, procurando analisar a sua evolução ao longo do tempo.

5.1. Conceitos associados à aleatoriedade

5.1.1. Experiências relacionadas com o acaso

Na tarefa diagnóstico (Anexo 1.1) contemplei diversas questões onde os alunos deveriam quantificar o nível de aleatoriedade com que determinado acontecimento poderia ocorrer: "algumas vezes", "nunca" ou "sempre".

A segunda questão da tarefa diagnóstico tinha exatamente como objetivo averiguar se os alunos sabiam reconhecer situações aleatórias que envolvam a *noção de acaso* e tinham alguma noção acerca do vocabulário próprio para as descrever. Na figura 4 podemos analisar as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

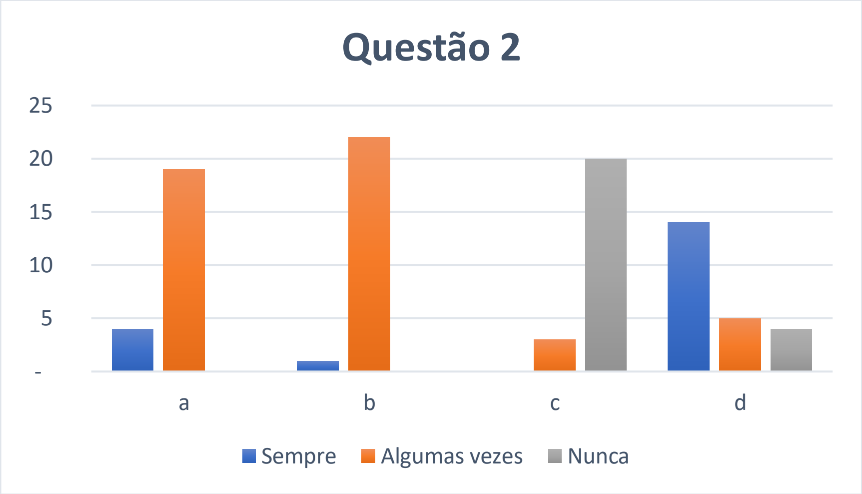


Figura 4 – Respostas dadas pelos alunos à questão 2 da tarefa diagnóstico

Da análise da figura 4 podemos verificar que mais de metade dos alunos considera que podemos obter algumas vezes "uma bola branca", a maioria dos alunos respondeu que podemos obter algumas vezes "uma bola cinzenta", a maioria respondeu que nunca podemos obter "uma bola vermelha" e a maioria considerou que se obtém sempre "uma bola não vermelha". Nesta última alínea as respostas dividiram-se ligeiramente mais do que nas restantes. Deste modo, a maioria dos alunos respondeu adequadamente às situações propostas.

Podemos, ainda, afirmar que alguns alunos não prestaram a devida atenção ao enunciado, visto que no saco não existia qualquer bola vermelha, mas alguns deles responderam que poderíamos obter algumas vezes essa mesma bola. Soraia e Telmo responderam adequadamente a todas as alíneas, no entanto, Paulo optou pela opção errada na alínea d), considerando ser possível obter algumas vezes "uma bola não vermelha". Podemos considerar que maioritariamente, os alunos apresentaram boas intuições relativamente a esta experiência.

Na primeira tarefa proposta em sala de aula (Anexo 1.2), os alunos consideraram a experiência que consistia em retirar uma bola de um saco com bolas numeradas de 1 a 6 e registar o seu número. Posteriormente, foi questionado se existia algum número que teria maior probabilidade de sair, tendo os alunos de justificar a sua resposta. Na figura 5 podemos analisar a resposta de Telmo a esta questão. O aluno considera que a extração da bola é aleatória e, portanto, poderá sair qualquer bola, não existindo uma com maior probabilidade que outra.

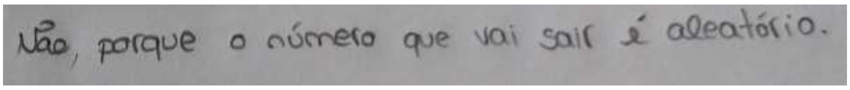


Figura 5 - Resolução de Telmo à questão 2 da parte II da tarefa I

Paulo e Soraia apresentam a mesma justificação (Figura 6), afirmando que todos os números teriam a mesma probabilidade de sair.

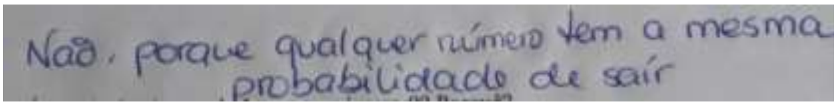


Figura 6 - Resolução de Paulo à questão 2 da parte II da tarefa I

Os alunos demonstram mais uma vez ter boas intuições acerca do conceito de aleatoriedade.

Na quarta aula (Anexo 2.4), surgiu em grupo-turma a dificuldade de compreensão o que é um dado viciado, uma noção ligada ao conceito de aleatoriedade:

Guilherme: Eu meti que é um dado viciado, porque calhou mais vezes o 6.

Manuel: Eu não concordo! Não pode estar viciado stôra!

Diogo: Eu também concordo, não há coisas viciadas…

Professora: Se vocês tivessem que apostar num número, em qual deles apostariam?

Turma: No 6!

Professora: Então e porque é que o faziam?

Diogo: Porque saiu mais vezes…

Guilherme: Mas os outros números juntos podem sair mais vezes do que seis!

Rui: Para um dado estar viciado as probabilidades têm de estar de 50 para cima!

Professora: Quem te deu essa justificação?

Rui: Eu!

Manuel: Só as baterias dos telemóveis são viciadas!

Apesar dos alunos participantes não terem intervindo, esta discussão em grupo-turma contribuiu para perceber quais as ideias relativamente ao conceito de aleatoriedade que os alunos tinham. Verifica-se que alguns alunos têm dificuldade em compreender que alguns objetos podem estar viciados, associando que este termo está ligado apenas aos telemóveis. Por outro lado, outro aluno criou uma "regra" para decidir quando algum objeto estaria viciado. Se considerarmos um espaço amostral em que apenas existem dois acontecimentos com igual probabilidade, o aluno poderá ter pensado de forma adequada, isto é, caso a frequência relativa seja superior a 50%, esse objeto estaria viciado. No entanto, no contexto do exercício proposto em aula, esta "regra" não seria apropriada.

5.1.2. Experiências aleatórias e experiências deterministas

Relativamente aos conceitos de *experiência determinista e experiência aleatória*, verificamos que a "Tarefa I" (Anexo 1.2), contempla uma questão em que é solicitado aos alunos que classifiquem as experiências descritas em dois grupos: um em que é possível prever com exatidão o resultado da experiência e outro onde tal não é possível.

Paulo considerou que na experiência "Lançar uma moeda ao ar no início de um jogo de futebol e observar se se obtém face nacional ou face europeia" seria possível prever com exatidão o resultado da mesma (Figura 7). O aluno justifica que "Sabemos que ou sai face europeia ou face nacional, por isso podemos prever com exatidão que uma destas duas coisas acontece". Paulo revela compreender que se trata de uma experiência aleatória, no entanto, não consegue compreender que "prever com exatidão" só é quando estamos perante um único resultado possível.

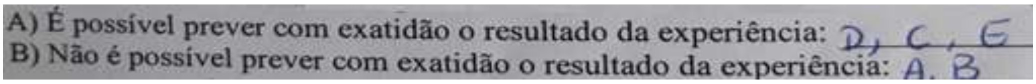

A) É possível prever com exatidão o resultado da experiência: D, C, E
B) Não é possível prever com exatidão o resultado da experiência: A, B

Figura 7 - Resolução de Paulo à questão 1 da Tarefa I

Soraia e Telmo classificam adequadamente as experiências descritas (Figura 8).

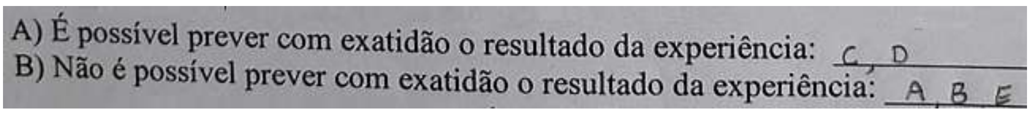

A) É possível prever com exatidão o resultado da experiência: C, D
B) Não é possível prever com exatidão o resultado da experiência: A, B, E

Figura 8- Resolução de Telmo à questão 1 da Tarefa I

A questão 5 da ficha de trabalho (Anexo 1.5), enviada para trabalho de casa no dia 8 de março, incide na classificação das experiências novamente em dois grupos: experiências deterministas e experiências aleatórias. Da análise destas tarefas, verifiquei que Soraia e Telmo responderam acertadamente a esta questão, demonstrando que este tópico foi compreendido na sua totalidade. Relativamente a Paulo, tal como já referido, este não resolveu a ficha de trabalho pelo que, não posso aferir se o aluno compreendeu efetivamente este tópico.

5.1.3. Síntese

Sintetizando as aprendizagens realizadas pelos alunos no que diz respeito aos conceitos associados à aleatoriedade, os alunos mostraram ter boas intuições assim como conseguir aplicar conceitos ligados ao acaso.

No que diz respeito à classificação de experiências, os alunos apresentaram alguma resistência inicial na definição de experiências deterministas e experiências aleatórias, pois consideravam que podíamos "prever com exatidão" experiências em que existiam dois casos possíveis, pelo que foi difícil compreenderem o conceito "exatidão".

5.2. Conceitos associados ao espaço amostral

5.2.1. Acontecimentos, casos favoráveis e casos possíveis

No que diz respeito aos *acontecimentos* e *conectivos lógicos,* começo por analisar novamente a questão 2 da tarefa diagnóstico (Anexo 1.1). Creio que os alunos apresentam ainda dificuldades em compreender a alínea d) desta questão, onde é referido o acontecimento "uma bola não vermelha", uma vez que inclui o conetivo *não*.

Na ficha de trabalho I (Anexo 1.5) contemplaram-se algumas questões contendo conectivos lógicos. Particularmente a questão número 2.2, no contexto de uma experiência aleatória que consiste em retirar uma carta à sorte, de um baralho de 52 cartas, em que é solicitado que calculem a probabilidade de "não tirar uma carta preta". Soraia interpreta, claramente, a situação descrita, identificando (Figura 9) o número de cartas que satisfaziam o acontecimento "não tirar uma carta preta". A aluna demonstra que consegue compreender as situações descritas mesmo na presença do conectivo lógico *não*.

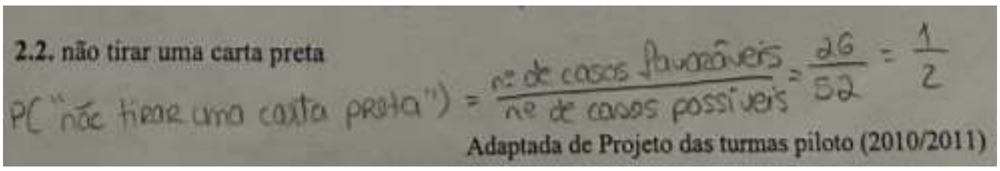
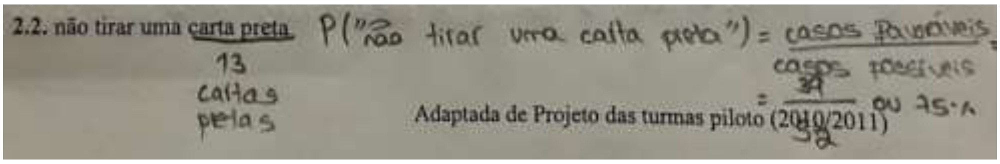


Figura 9 - Resolução de Soraia à questão 2.2 da ficha de trabalho I

Telmo apresenta alguma dificuldade (Figura 10) na compreensão do enunciado. Apesar do aluno identificar o número de cartas pretas, não teve em conta que um baralho apresenta dois naipes pretos e outros dois vermelhos e, portanto, tem 26 cartas pretas e não 13 como o aluno apresenta.


2.2. não tirar uma carta preta P("não tirar uma carta preta") = casos favoráveis / casos possíveis = 39/52 ou 75%

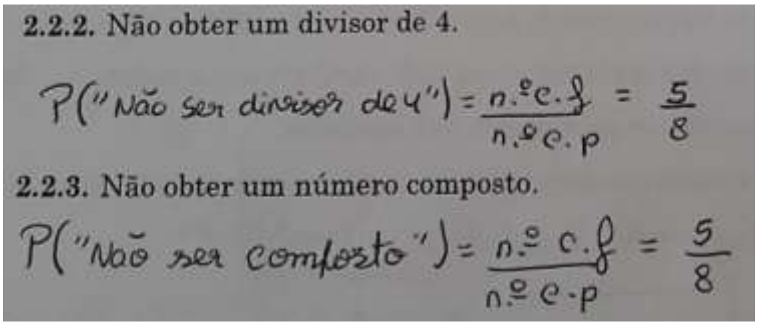
13 cartas pretas

Adaptada de Projeto das turmas piloto (2010/2011)

Figura 10 - Resolução de Telmo à questão 2.2. da ficha de trabalho I

Paulo não entregou a resolução da ficha de trabalho I, desta forma, não temos dados para analisar a evolução do aluno.

Na ficha de avaliação (Anexo 1.8) realizada no dia 22 de março estavam contempladas duas alíneas em que os alunos teriam de calcular probabilidades de acontecimentos contendo também o conetivo lógico *não*. Na figura 11 podemos verificar a resolução de Soraia a estas duas alíneas, em que é possível observar que identificou corretamente o número de casos favoráveis:


2.2.2. Não obter um divisor de 4.

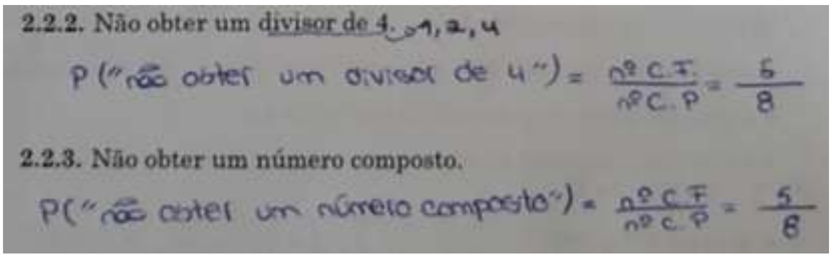
P("Não ser divisor de 4") = n.º c.f / n.º c.p = 5/8

2.2.3. Não obter um número composto.

P("Não ser composto") = n.º c.f / n.º c.p = 5/8

Figura 11 - Resposta de Soraia às questões 2.2.2 e 2.2.3 da ficha de avaliação

Telmo resolve as duas alíneas de forma idêntica a Soraia, indicando explicitamente os divisores de 4, conseguindo identificar que os restantes números não o são (Figura 12).


2.2.2. Não obter um divisor de 4. 1, 2, 4

P("não obter um divisor de 4") = nº C.F. / nº C.P. = 5/8

2.2.3. Não obter um número composto.

P("não obter um número composto") = nº C.F / nº C.P = 5/8

Figura 12 -Resolução de Telmo às questões 2.2.2 e 2.2.3 da ficha de avaliação

Na figura 13 podemos analisar a resolução de Paulo à mesma questão:

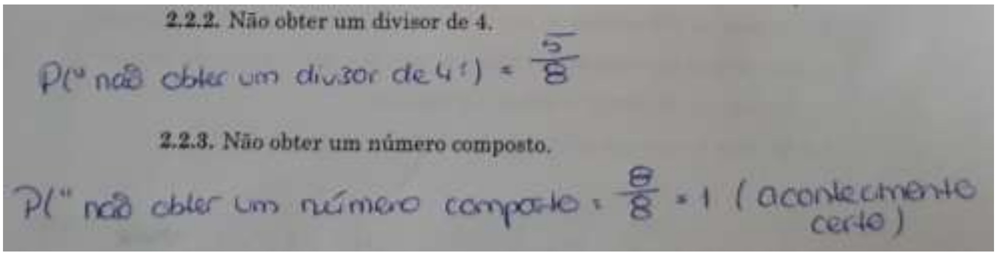


Figura 13 - Resposta de Paulo às questões 2.2.2 e 2.2.3 da ficha de avaliação

Paulo consegue encontrar corretamente o número de casos favoráveis ao acontecimento "não obter um divisor de 4". Demonstrando conseguir compreender o que é solicitado no enunciado. No entanto, quando o aluno se confronta com o acontecimento "não obter um número composto", não consegue encontrar corretamente o número de casos favoráveis. Esta dificuldade poderá advir de o aluno não ter conhecimento da noção de números compostos, uma vez que conseguiu compreender a alínea anterior onde era usado o conetivo *não*.

No que diz respeito à noção de *casos possíveis* a um acontecimento, na primeira tarefa proposta (Anexo 1.2) foi solicitado aos alunos que identificassem o conjunto de possibilidades existentes, relativamente às experiências anteriormente apresentadas. Telmo, Paulo e Soraia apresentam respostas corretas para a maioria das questões (Figura 14), exceto a que diz respeito à experiência em que se lança uma pedra ao rio. Nessa experiência Telmo justifica que "inicialmente flutua e depois afunda-se". Uma vez que era solicitado que o aluno apresentasse todas as possibilidades para cada experiência, Telmo justificou em aula que "uma pedra pode inicialmente flutuar se for lançada de lado". Os alunos mostraram alguma resistência em compreender que a situação pode ocorrer, mas no final irá acabar por afundar e, portanto, esse é a única possibilidade.

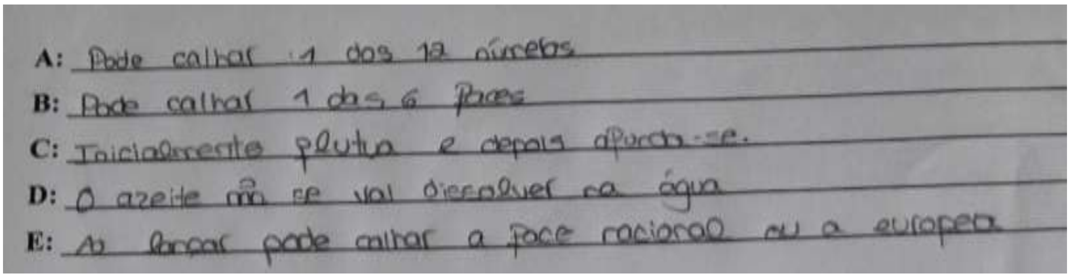


Figura 14 - Resolução de Telmo à questão 2 da parte I da tarefa I

Na mesma tarefa, a questão 5 da parte II foi elaborada com vista aos alunos identificarem os *casos favoráveis* a um acontecimento. Na experiência que consistia em retirar uma bola de um saco com seis bolas numeradas de 1 a 6 e registar o seu número, era solicitado que os alunos identificassem quantas possibilidades existiam de sair uma bola com o número 1.

Paulo, Telmo e Soraia responderam (Figura 15) de igual modo, considerando que existiam seis possibilidades, identificando-as na sua resolução. Em discussão com Paulo, compreendi que este considerou que a bola poderia sair à primeira extração, à segunda, etc. Os alunos tiveram alguma dificuldade em compreender que apenas teríamos uma possibilidade, uma vez que só existia uma bola com o número 1.

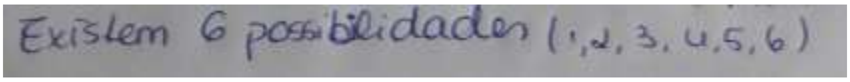


Figura 15 - Resolução de Paulo à questão 5 da parte II da tarefa I

Na ficha de avaliação (Anexo 1.8), foi solicitado que os alunos calculassem diversos valores de probabilidades de acontecimentos, em que os alunos identificaram claramente o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Tal como Soraia (Figura 16), os restantes participantes identificam adequadamente o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis ao acontecimento “o produto obtido ser 12”.

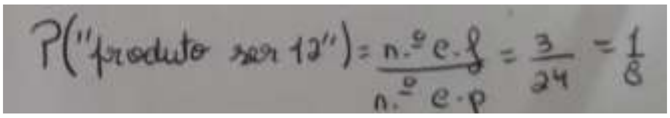


Figura 16 - Resolução de Soraia à questão 4 da ficha de avaliação

5.2.2. Acontecimentos certos, impossíveis, possíveis, compostos e elementares

A questão 3 da tarefa diagnóstico (Anexo 1.1) pretendia, mais uma vez, que os alunos classificassem os acontecimentos apresentados numa de três categorias: obtinha-se sempre, algumas vezes ou nunca. Estas categorias correspondem exatamente à *classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis*. A figura 17 contempla as respostas dadas pelos alunos da turma a esta questão:

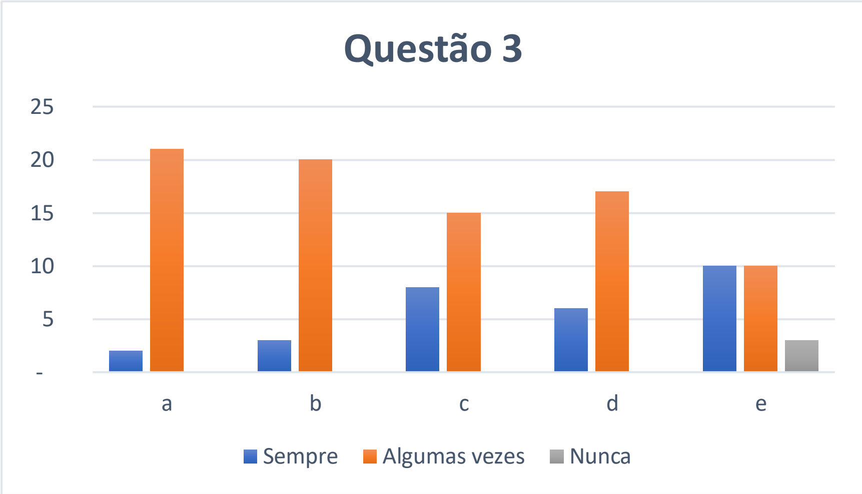


Figura 17 - Respostas dadas pelos alunos à questão 3 da tarefa diagnóstico

Analisando a figura 17, podemos verificar que quase todos os alunos consideraram acertadamente que poderíamos obter algumas vezes “uma bola branca e uma bola preta”. A maioria respondeu corretamente que nunca poderíamos obter “duas bolas cinzentas”. A maioria respondeu, erradamente, que poderíamos obter algumas vezes “uma das duas bolas não cinzenta”. Mais de 70% dos alunos considerou adequadamente que poderíamos obter algumas vezes “uma bola branca e outra não branca” e, por fim, relativamente ao acontecimento “obter uma das duas bolas branca ou preta”, 43% respondeu corretamente que poderíamos obter sempre e outros 43% considerou, de forma errónea, que poderíamos obter algumas vezes, sendo que os restantes consideraram que esse acontecimento nunca poderia ocorrer.

Apesar de diversos acontecimentos conterem conectivos lógicos, é essencialmente na alínea e) que as opiniões dos alunos se dividem, havendo tantos a responder “sempre” como “algumas vezes”. Esta alínea contém o conectivo lógico *ou*, sendo para os alunos mais difícil de compreender a situação descrita acabando por responder erroneamente à questão. No entanto, nas restantes alíneas, a generalidade dos alunos apresenta boas intuições relativamente à classificação de acontecimentos.

Dos alunos participantes, Soraia e Telmo responderam adequadamente a todas as alíneas, conseguindo classificar os acontecimentos apresentados. No entanto, Paulo é um dos alunos da turma que considera que nunca se obtém “uma das duas bolas branca ou preta” assim como considera que se obtém algumas vezes “uma das duas bolas não cinzentas”. O aluno apresenta, claramente, dificuldades em classificar acontecimentos certos.

Na ficha de avaliação (Anexo 1.8) contemplei a questão 1.2. com o objetivo de avaliar se os alunos conseguiam classificar os acontecimentos usando a terminologia adequada, justificando corretamente a sua classificação. Considerando o espaço de resultados desta experiência, $\mathrm{E} = \{254{,}245{,}452{,}425{,}542{,}524\}$, solicitou-se aos alunos que classificassem três acontecimentos, justificando a sua escolha.

Da análise da resolução de Paulo (Figura 18), verificamos que o aluno classifica o primeiro acontecimento em composto, justificando adequadamente a sua resposta. No entanto, nos restantes acontecimentos, o aluno classifica-os em complementares, encontrando um acontecimento que, efetivamente, lhe seja complementar. Apesar de justificar adequadamente com o respetivo acontecimento complementar, não era solicitado para classificar dois acontecimentos em articulação, mas sim acontecimentos isolados.

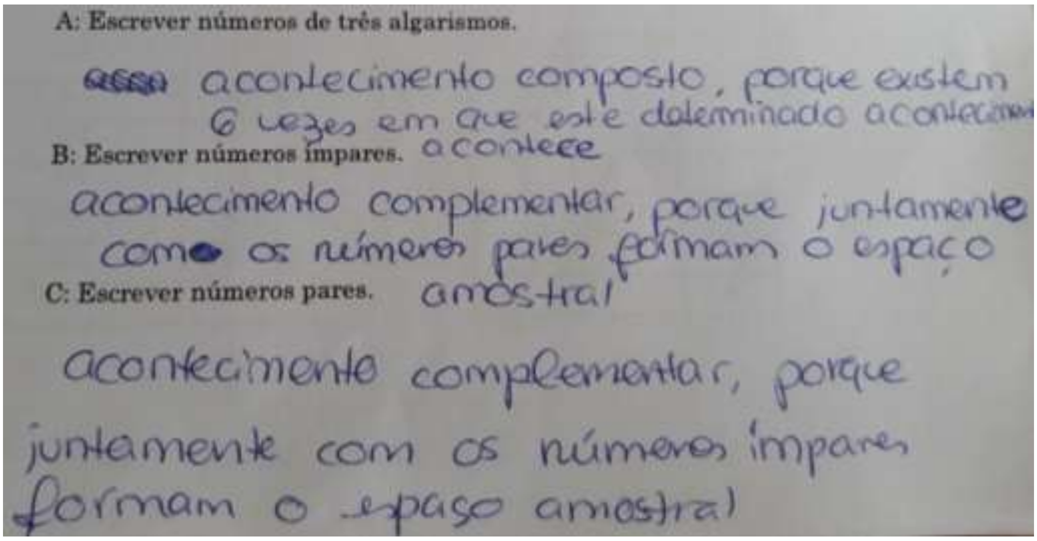
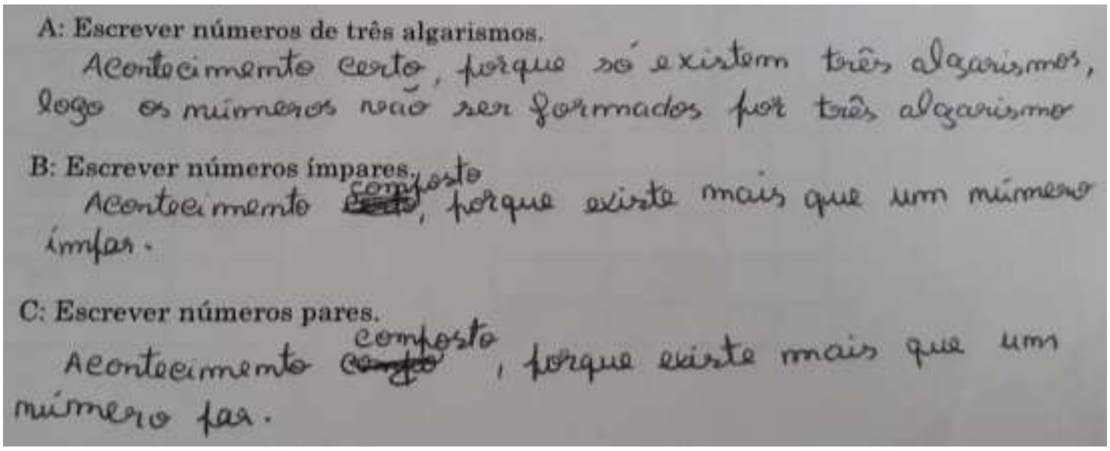


Figura 18 - Resolução de Paulo à questão 1.2. da ficha de avaliação

Telmo e Soraia apresentam resoluções idênticas da questão 1.2 da ficha de avaliação. Analisando a resolução de Soraia (Figura 19), verificamos que a aluna consegue classificar, assim como justificar adequadamente, os acontecimentos referentes a uma experiência aleatória.


A: Escrever números de três algarismos.
Acontecimento certo, porque só existem três algarismos, logo os números vão ser formados por três algarismo

B: Escrever números ímpares.
Acontecimento ~~certo~~ composto, porque existe mais que um número ímpar.

C: Escrever números pares.
Acontecimento ~~certo~~ composto, porque existe mais que um número par.

Figura 19 - Resolução de Soraia à questão 1.2. da ficha de avaliação

Analisando detalhadamente as justificações de Soraia, podemos verificar que relativamente ao acontecimento A, a aluna poderá ter considerado que existiam três algarismos (5,4,2) e, portanto, teríamos números de três algarismos. Por outro lado, pode ter interpretado acertadamente, uma vez que no enunciado era explícito que "formam-se números: o primeiro cartão ocupa a ordem das centenas, o segundo cartão ocupa a ordem das dezenas e o terceiro cartão ocupa a ordem das unidades". No entanto, dado que a aluna respondeu acertadamente à questão 1.1 em que era solicitado para apresentar o universo de resultados, considero que a aluna compreendeu efetivamente como classificar acontecimentos. Relativamente às justificações dos acontecimentos B e C, a aluna identifica que existe mais que um número ímpar e mais que um número par e, portanto, os acontecimentos são compostos. Verificamos assim que ambos os alunos dominam a classificação de acontecimentos.

5.2.3. Acontecimentos complementares, incompatíveis e equiprováveis

Os conceitos de acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares foram abordados pela primeira vez na aula de 1 de março (Anexo 2.2), tendo sido, por mim introduzidos, no início da mesma. Estes, pela sua especificidade, não foram contemplados na tarefa de diagnóstico.

Depois da introdução dos conceitos, foram propostos exercícios do manual para aplicação dos conhecimentos. No momento de trabalho autónomo, Telmo discute com os restantes elementos do seu grupo relativamente à questão 3.4 do manual (Anexo 2.2), em que era solicitado que os alunos indicassem um par de acontecimentos: *incompatíveis* mas não *complementares*; complementares; compatíveis. Considere-se o espaço de resultados desta experiência: $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Telmo: Os [acontecimentos] complementares, podemos pôr o A (sair número par) e o B (sair número ímpar).

Filipa: É como eu! Os compatíveis é mais ou menos como se fosse o diagrama de Venn?

Telmo: Sim!

Filipa: Incompatíveis mas não complementares… Não estou a perceber! Stôra pode explicar o a)?

Da análise da discussão entre o grupo de trabalho de Telmo, verificamos que os alunos conseguem compreender o que são acontecimentos complementares. Os alunos também compreendem acontecimentos compatíveis, associando-os ao diagrama de Venn, uma vez que esta representação usualmente contempla a interseção de, pelo menos, dois acontecimentos. No entanto, quando se deparam com a necessidade de encontrar dois acontecimentos que sejam incompatíveis mas não complementares, não conseguem ultrapassar esta dificuldade necessitando do auxilio da professora. Efetivamente, como esta alínea incluía os dois conceitos, tornou-se mais complexa de compreender para os alunos.

No momento de discussão da alínea a) deste exercício em grupo-turma, Soraia intervêm: "Stôra, não pode ser o G ("sair cubo perfeito") e o A ("sair número par")?". Esta questão demonstra que a aluna necessita de obter uma validação da sua resposta uma vez que ainda não apresenta confiança suficiente para certificar-se que a resposta estaria certa.

No momento de discussão da alínea c), Paulo também intervêm: "Eu meti o A (sair número par) e o E (sair múltiplo de 2) stôra!". Uma vez que a resposta apresentada pelos colegas era diferente, Paulo, tal como Soraia necessitou da validação da sua resolução.

Na ficha de avaliação (Anexo 1.8), a questão 3 tinha como objetivo verificar se os alunos conheciam uma das principais características de dois acontecimentos incompatíveis, isto é, que a interseção desses acontecimentos corresponderia ao conjunto vazio. Tal como Telmo, os restantes participantes identificaram facilmente a opção correta (Figura 20), demonstrando dominar o conceito de acontecimentos incompatíveis.

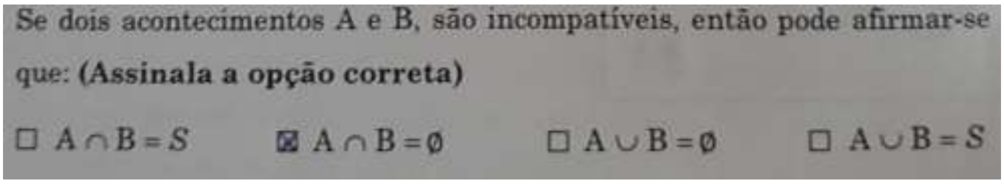


Figura 20 - Resolução de Telmo à questão 3 da ficha de avaliação

Na entrevista (Anexo 1.9) contemplei uma questão que permitia verificar se os alunos conseguiam aplicar o conceito de *acontecimentos complementares*. No enunciado era indicada aos alunos a probabilidade de se ganhar um prémio. Na questão 2.2.1 era referido que não se tinha ganho o prémio e, portanto, qual era a probabilidade de tal acontecer.

Paulo apresenta uma resolução confusa (Figura 21):

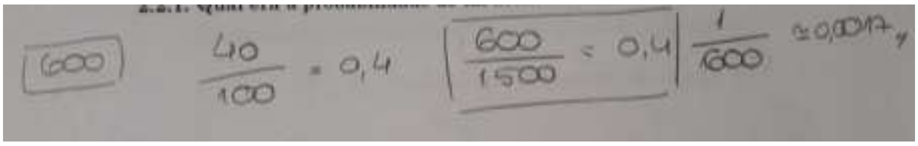


Figura 21 - Resolução de Paulo à questão 2.2.1 da entrevista

Questionado sobre a sua resolução:

Professora: Tens aí vários valores na tua resolução, como é que pensaste?

Paulo: Isto foi só para me orientar. Pus 1 em 600.

Professora: E como pensaste?

Paulo: (Algum tempo de silêncio) Pois…

Efetivamente o aluno poderá ter pensado que ao comprar uma rifa teríamos um caso favorável, no entanto torna-se complicado compreender a escolha do número 600 para o número de casos possíveis.

Por sua vez, Soraia apresenta um erro na sua resolução da mesma questão (Figura 22), uma vez que na alínea anterior ter-se-ia enganado na determinação do número de rifas com prémio. Tal como Soraia, Telmo também apresenta uma resolução idêntica, mas sem qualquer erro de cálculo.

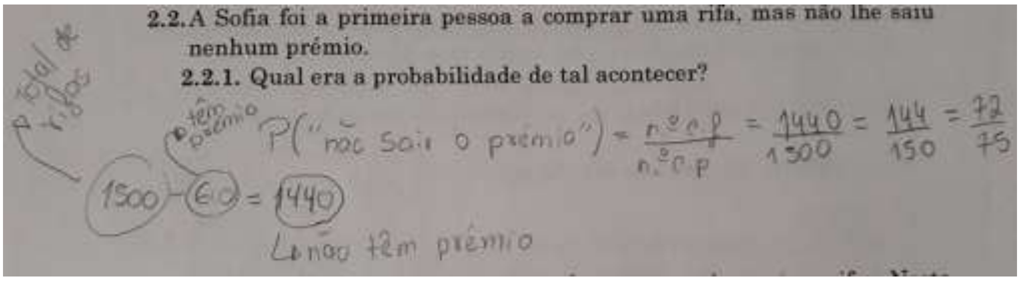


Figura 22 - Resolução de Soraia à questão 2.2.1 da entrevista

Em conversa com a aluna foi possível compreender como esta tinha pensado: "Eu fui subtrair os que tinham prémio ao total de rifas para descobrir aquelas que não tinham prémio. Para depois calcular a probabilidade…". Apesar de a aluna não ter aplicado o conceito de acontecimentos complementares, teve um raciocínio adequado para descobrir o número de rifas sem prémio de modo a poder calcular a probabilidade solicitada.

Podemos concluir que os alunos conseguem aplicar o conceito de acontecimentos complementares quando é solicitado que os classifiquem. No entanto, não são capazes de utilizar esse conhecimento para descobrir uma probabilidade.

O conceito de *acontecimentos equiprováveis* foi abordado pela primeira vez na tarefa "Estará equilibrada?", sendo este um dos objetivos de aprendizagem da mesma. Esta tarefa começa por questionar os alunos acerca da sua opinião relativamente à face de uma moeda com maior probabilidade de ficar voltada para cima. Esta questão, permite compreender, antes de qualquer exploração, se o aluno tem uma ideia acerca de acontecimentos equiprováveis.

Todos os participantes responderam de igual forma a esta questão, pelo que iremos analisar a resolução de Telmo (Figura 23). Verifica-se então que os alunos têm uma ideia de que a probabilidade de sair face Europeia numa moeda é igual à probabilidade de sair face Coroa.

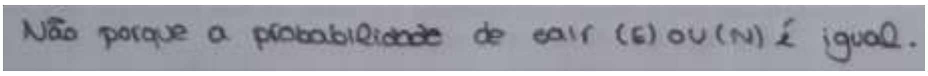
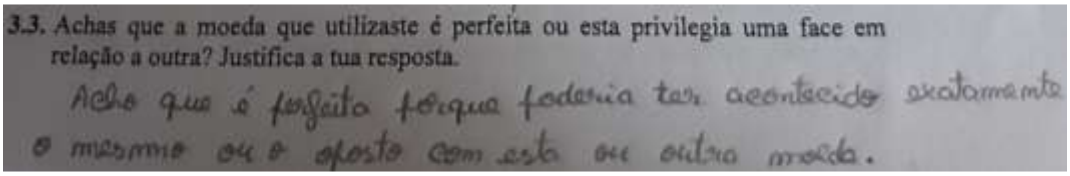


Figura 23 - Resolução de Telmo à questão 1 da tarefa "Estará equilibrada?"

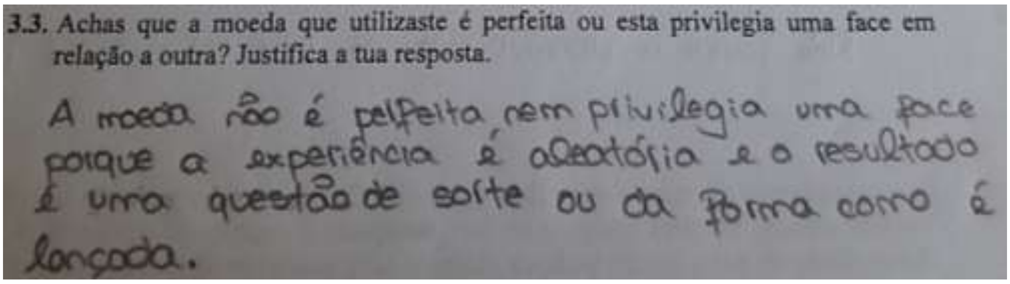
Os alunos efetuaram o lançamento de uma moeda de um euro 10 vezes, sendo convidados a justificar se consideravam a moeda perfeita ou se esta seria viciada. Na exploração realizada, Telmo obteve um valor de 40% para a frequência relativa da face Europeia e 60% para a face Nacional (Figura 24). Deste modo, considerou que a moeda não seria perfeita nem viciada, justificando que será tudo "uma questão de sorte". O aluno compreende que a experiência é aleatória e, portanto, poder-se-á obter um valor para a frequência relativa da face Nacional superior à face Europeia.


3.3. Achas que a moeda que utilizaste é perfeita ou esta privilegia uma face em relação a outra? Justifica a tua resposta.

Acho que é perfeita porque poderia ter acontecido exatamente o mesmo ou o oposto com esta ou outra moeda.

Figura 24 - Resolução de Telmo à questão 3.3 da tarefa "Estará equilibrada?"

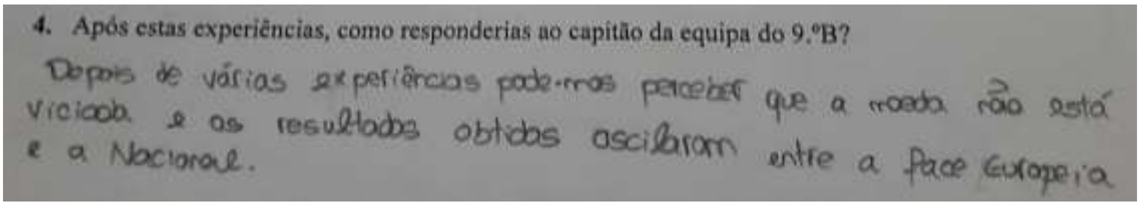
Tal como Telmo, Soraia e Paulo (Figura 25) obtiveram exatamente os mesmos valores da frequência relativa que o grupo de Telmo, admitindo de igual forma que a experiência é aleatória. No entanto, justificam de maneira diferente, assumindo que poderia ocorrer exatamente o contrário, isto é, conseguir mais lançamentos em que se obtém a face Europeia do que a face Nacional e, portanto, a moeda seria perfeita.


3.3. Achas que a moeda que utilizaste é perfeita ou esta privilegia uma face em relação a outra? Justifica a tua resposta.

A moeda não é pelfeita nem privilegia uma face porque a experiência é aleatória e o resultado é uma questão de sorte ou da forma como é lançada.

Figura 25 - Resolução de Telmo à questão 3.3 da tarefa "Estará equilibrada?"

Posteriormente, os alunos exploraram a Parte II da tarefa com recurso ao *Geogebra*, onde puderam lançar a moeda um maior número de vezes. Depois desta exploração, verificamos (Figura 26) que Telmo já considera que a moeda é perfeita apesar de admitir que os resultados "oscilam entre a face europeia e a face nacional".

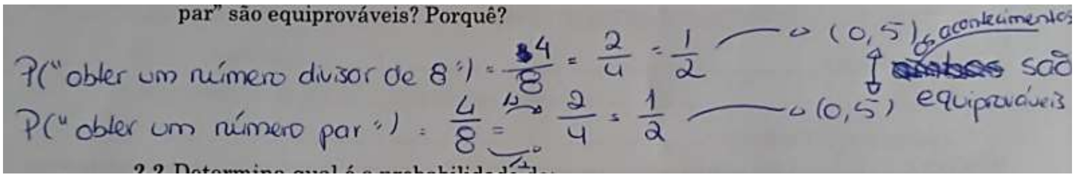

4. Após estas experiências, como responderias ao capitão da equipa do 9.ºB?

Depois de várias experiências pode-mos perceber que a moeda não está viciada e os resultados obtidos oscilaram entre a face Europeia e a Nacional.

Figura 26 - Resolução de Telmo à questão 4 da tarefa "Estará equilibrada?"

Os restantes participantes do estudo mantêm a opinião dada na questão 3.3 da mesma tarefa.

Na ficha de avaliação (Anexo 1.8), Paulo demonstra (Figura 27) ter conhecimento sobre a noção de acontecimentos equiprováveis, calculando as respetivas probabilidades dos acontecimentos solicitados. Posteriormente, o aluno identifica que o valor das probabilidades é igual e, portanto, estamos perante acontecimentos equiprováveis.

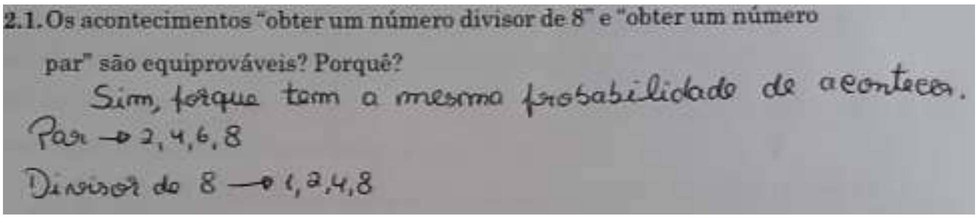

par" são equiprováveis? Porquê?

P("obter um número divisor de 8") = $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ → (0,5) acontecimentos são equiprováveis

P("obter um número par") = $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ → (0,5)

Figura 27 - Resolução de Paulo à questão 2.1. da ficha de avaliação

Soraia identifica (Figura 28), de igual forma, que os acontecimentos são equiprováveis, identificando os casos favoráveis a cada um dos acontecimentos. A resolução da aluna permite concluir que domina o conceito de acontecimentos equiprováveis.


2.1. Os acontecimentos "obter um número divisor de 8" e "obter um número par" são equiprováveis? Porquê?

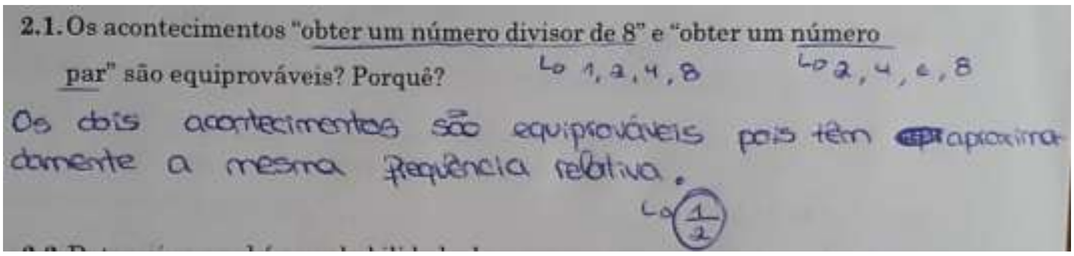
Sim, porque tem a mesma probabilidade de acontecer.

Par → 2, 4, 6, 8

Divisor de 8 → 1, 2, 4, 8

Figura 28 - Resolução de Soraia à questão 2.1. da ficha de avaliação

Telmo justifica (Figura 29) que os acontecimentos são equiprováveis uma vez que apresentam "aproximadamente a mesma frequência relativa". Telmo identifica ainda os casos favoráveis a cada um dos acontecimentos. Da resolução do aluno podemos verificar que este revela conhecer o conceito de acontecimentos equiprováveis.


2.1. Os acontecimentos "obter um número divisor de 8" e "obter um número par" são equiprováveis? Porquê?

→ 1, 2, 4, 8 → 2, 4, 6, 8

Os dois acontecimentos são equiprováveis pois têm aproximadamente a mesma frequência relativa.

→ $\frac{1}{2}$

Figura 29 - Resolução de Telmo à questão 2.2 da ficha de avaliação

Todos os alunos mostram evidências que dominam o conceito de acontecimentos equiprováveis.

5.2.4. Representações no cálculo de probabilidades envolvendo acontecimentos compostos

A tarefa diagnóstico contemplava algumas questões que permitiam verificar as ideias que os alunos tinham acerca da *probabilidade em experiências compostas*, nomeadamente as questões 6 e 7. Na questão 6 (Figura 30), em que era apresentada uma experiência que consistia em lançar dois dados com as faces numeradas de 1 a 6 e contar o número de pintas que ficam voltadas para cima, solicitava-se aos alunos que indicassem a situação mais provável. A maioria dos alunos respondeu que "as duas situações anteriores são igualmente prováveis", ou seja, que seria tão provável "obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado" como "obter o número 6 em ambos os dados".

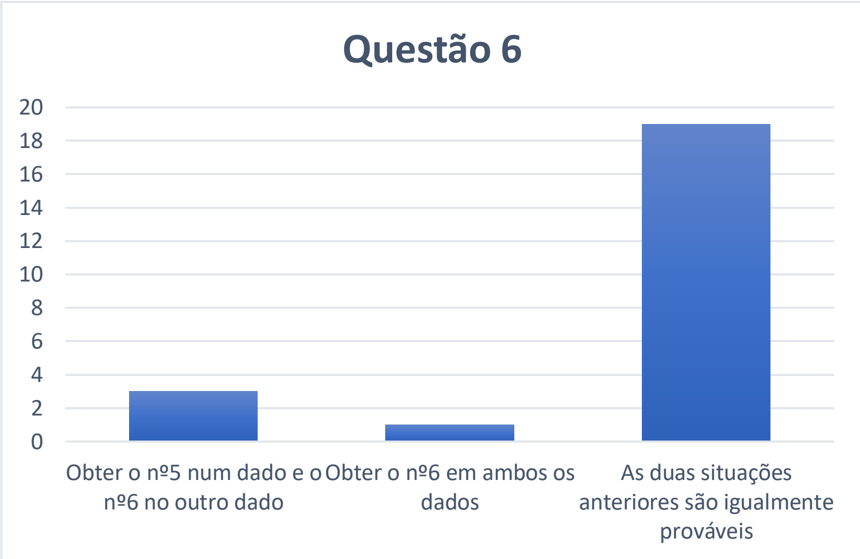


Figura 30 - Respostas dos alunos à questão 6 da tarefa diagnóstico

Verifica-se desta forma que a maioria dos alunos apresenta algumas ideias erróneas acerca de experiências compostas. Os alunos não põem em causa que existe apenas uma possibilidade de "obter o número 6 em ambos os dados" e duas possibilidades de "obter o número 5 num dado e o número 6 no outro". O desconhecimento de esquemas facilitadores da contagem, leva a que os alunos não consigam contabilizar todas as possibilidades. Dado que não é solicitada uma justificação para a resposta, não podemos afirmar se os alunos que responderam acertadamente à questão pensaram da forma adequada.

No que diz respeito à questão 7 (Figura 31), era apresentada uma experiência que consistia em lançar duas moedas ao ar e verificar as faces que ficavam voltadas para cima, tendo os alunos de escolher o resultado que se obteria mais vezes. A maioria dos alunos considerou que "os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes", isto é, que seria tão provável "a face nacional em ambas as moedas" como "a face europeia em ambas as moedas".

Figura 31 - Respostas dos alunos à questão 7 da tarefa diagnóstico

Nesta questão a maioria dos alunos responde corretamente, no entanto, uma vez que anteriormente esses mesmos alunos responderam de forma errada, possivelmente não terão compreendido bem essa questão. Mais uma vez, dado que não era solicitada qualquer tipo de justificação, não podemos afirmar com certeza absoluta que os alunos compreenderam a situação ou se foi simplesmente uma escolha aleatória.

Neste ano de escolaridade, no que diz respeito a experiências compostas apenas é solicitado que os alunos recorram a *representações* que os auxilie como método de contagem para o cálculo de probabilidades. Assim as questões 10 e 11 do manual (Anexo 2.7) foram propostas para trabalho de casa como forma de consolidação dos conhecimentos abordados em aula. Nestas questões eram apresentadas situações em que os alunos teriam de recorrer a um esquema, diagrama em árvore ou tabela de dupla entrada, para auxiliar na determinação dos casos possíveis e dos casos favoráveis a determinado acontecimento, com a finalidade de calcularem uma probabilidade.

Soraia apresenta alguma dificuldade em construir um diagrama em árvore (Figura 32) na questão 10, apresentando alguma falta de organização na construção deste esquema. A aluna decidiu escrever apenas uma vez as "sobremesas", ficando as ligações entre estas e o "prato" cruzadas. No entanto, a aluna consegue encontrar, adequadamente, o espaço de resultados da experiência. É de notar que a figura já contempla algum *feedback* por parte da professora à aluna.

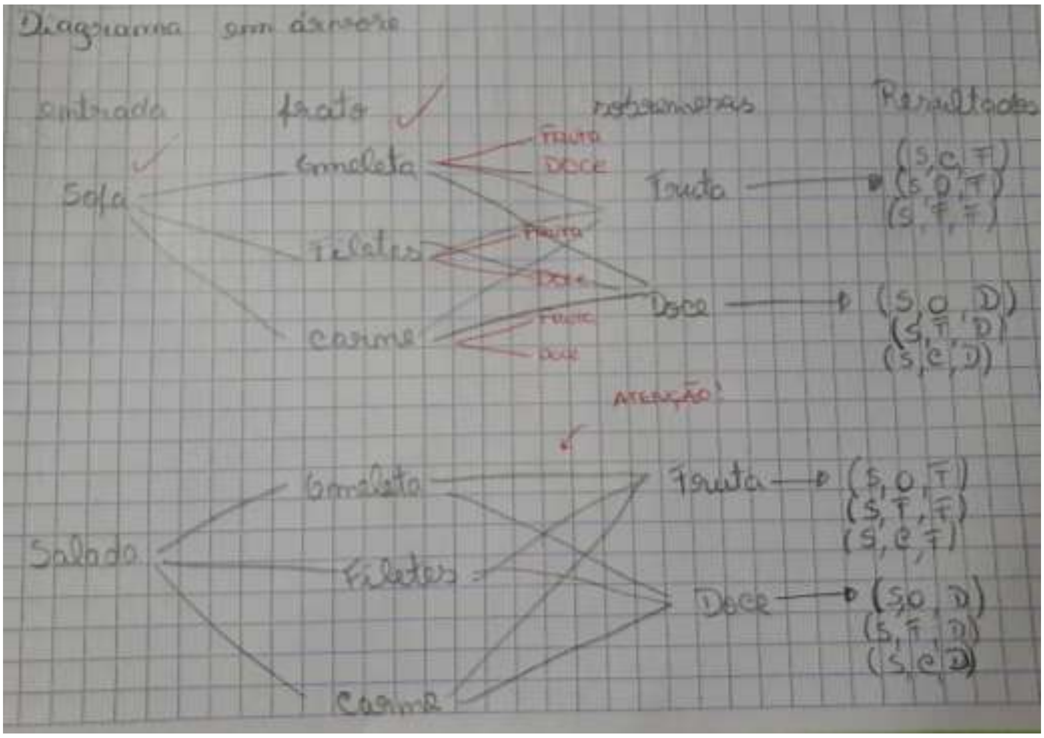


Figura 32 - Resolução de Soraia à questão 10 da página 170 do manual

Ao querer economizar espaço de resolução, Telmo apresenta o exercício (Figura 33) correto, mas muito compacto, tornando-se por vezes impercetível.

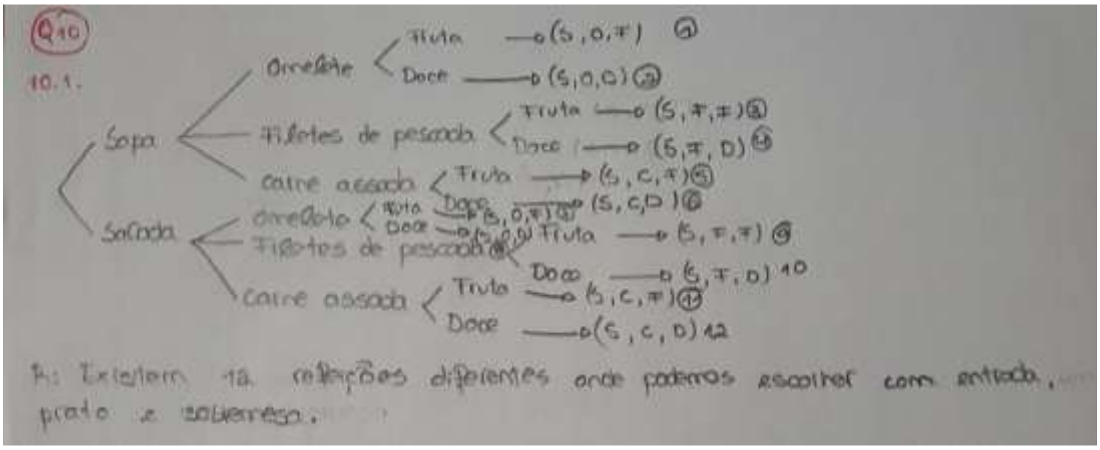


Figura 33 - Resolução de Telmo à questão 10 da página 170 do manual

Mais uma vez, Paulo não entregou qualquer resolução desta tarefa pelo que não existem dados relativamente a este item deste participante para analisar.

Na primeira questão da ficha de avaliação (Anexo 1.8) os alunos deveriam recorrer a uma representação para auxiliar na descoberta do espaço amostral associado a uma experiência. Soraia, tal como Telmo, apresenta uma resolução (Figura 34) nítida e esclarecedora acerca do seu pensamento, identificando o algarismo que corresponde às centenas, dezenas e unidades. A aluna demonstra dominar o diagrama em árvore, conseguindo encontrar facilmente o espaço amostral associado à experiência.

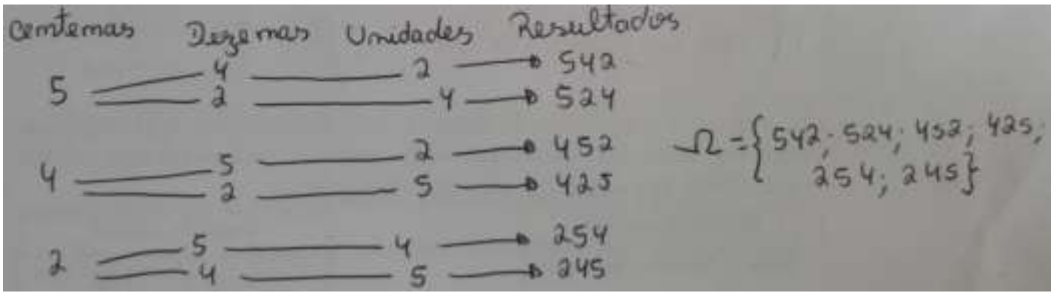


Figura 34 - Resolução de Soraia à questão 1.1 da ficha de avaliação

Por sua vez, Paulo não recorre (Figura 35) a nenhuma representação para o auxiliar na descoberta do espaço amostral. O aluno não parece ter compreendido as condições da experiência, encontrando casos que não satisfaziam as condições da experiência.

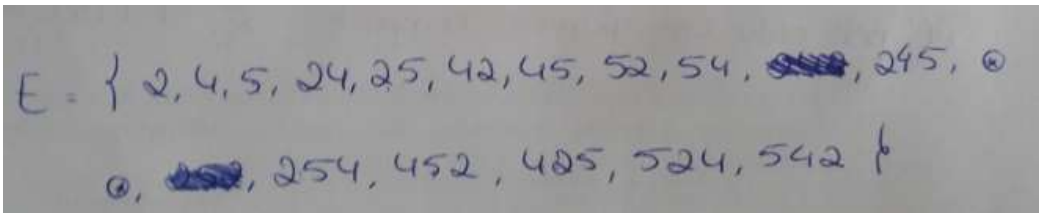


Figura 35 - Resolução de Paulo à questão 1.1 da ficha de avaliação

Soraia e Telmo sentem necessidade de recorrer a uma representação para auxiliar na descoberta do espaço amostral, apesar de não lhes ser dada qualquer informação explícita no enunciado. Por outro lado, Paulo parece não sentir essa necessidade, e não evidencia compreender as condições da experiência.

Na questão 11 (Anexo 2.7), proposta para trabalho de casa, Soraia apresenta a tabela de dupla entrada construída corretamente (Figura 36), no entanto, a aluna “corta” com cruzes os casos que não são favoráveis ao acontecimento “sair pelo menos um 3”. Efetivamente, na aula de exploração de uma tabela de dupla entrada, foram “cortados” alguns casos, uma vez que a experiência era sem reposição, pelo que a aluna poderá ter confundido estas duas situações.

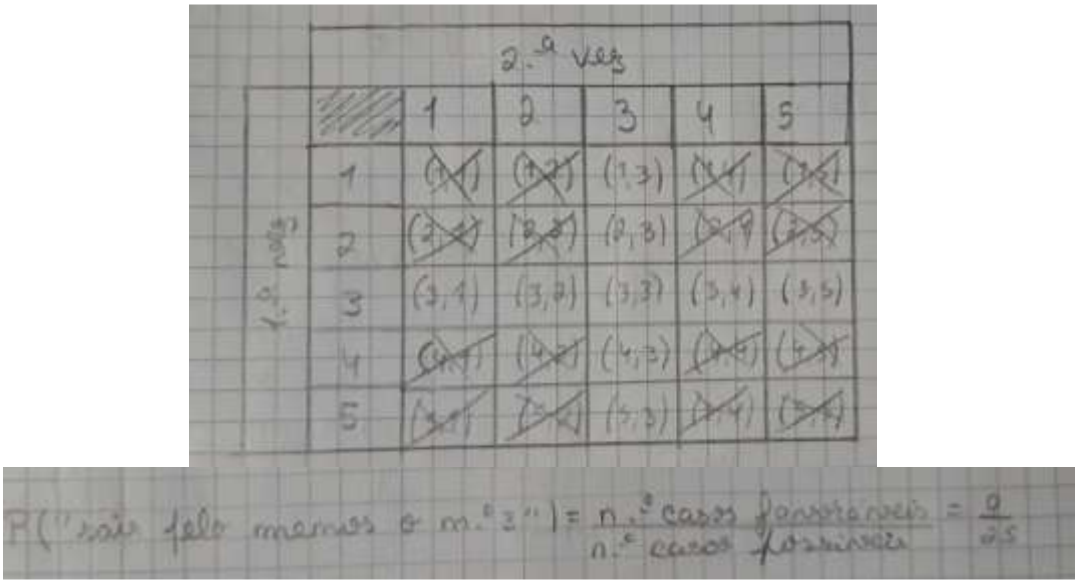


Figura 36 - Resolução de Soraia à questão 11 da página 171 do manual

Relativamente ao mesmo exercício, Telmo apresenta uma resolução (Figura 37) idêntica à de Soraia com exceção das cruzes. O aluno opta por rodear os casos favoráveis ao acontecimento que é solicitado, apresentando posteriormente o valor da probabilidade.

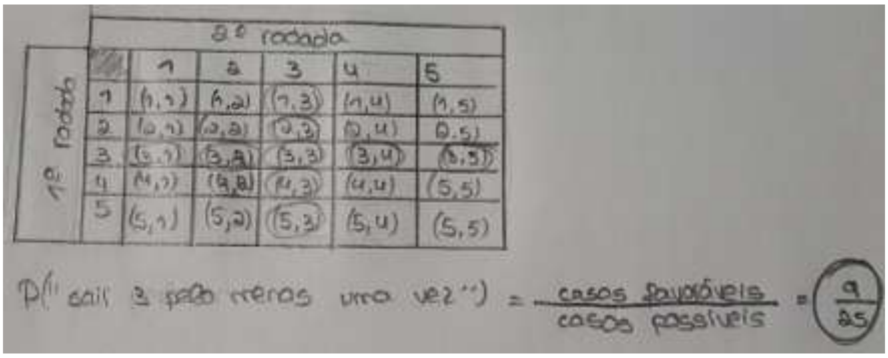


Figura 37 - Resolução de Telmo à questão 11 da página 171 do manual

Mais uma vez não existe qualquer registo de Paulo relativamente a este item.

O exercício 4 da ficha de avaliação (Anexo 1.8) pressupunha que os alunos recorressem a uma tabela de dupla entrada para calcularem a probabilidade do produto obtido entre um dado cúbico e um dado tetraédrico ser 12. No enunciado encontrava-se a sugestão para recorrerem a esta representação.

Soraia resolve, sem qualquer dificuldade, a questão proposta, recorrendo, tal como sugerido, a uma tabela de dupla entrada (Figura 38). A aluna assinala os casos favoráveis ao acontecimento, demonstrando desta forma ter compreendido como construir e utilizar esta representação para a auxiliar no cálculo da probabilidade pedida.

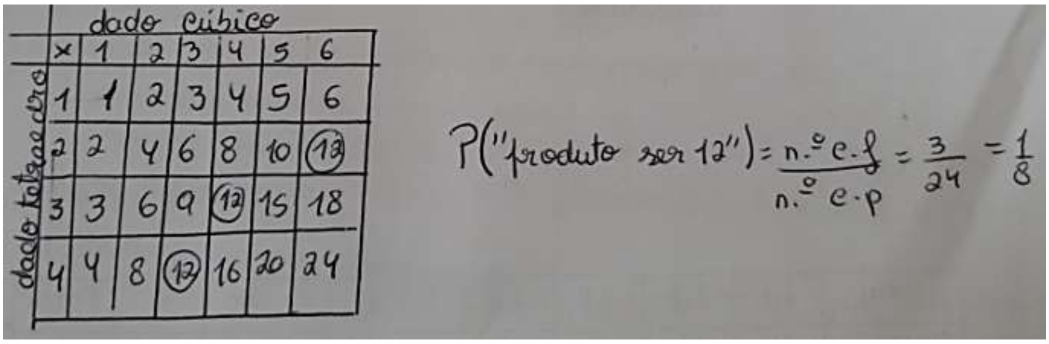


Figura 38 - Resolução de Soraia à questão 4 da ficha de avaliação

Paulo apresenta uma resolução (Figura 39) idêntica à de Soraia, trocando apenas o dado cúbico com o dado tetraédrico, apesar de não identificar as entradas. Telmo apresenta uma resolução igual à de Paulo, mas acrescenta a legenda às entradas.

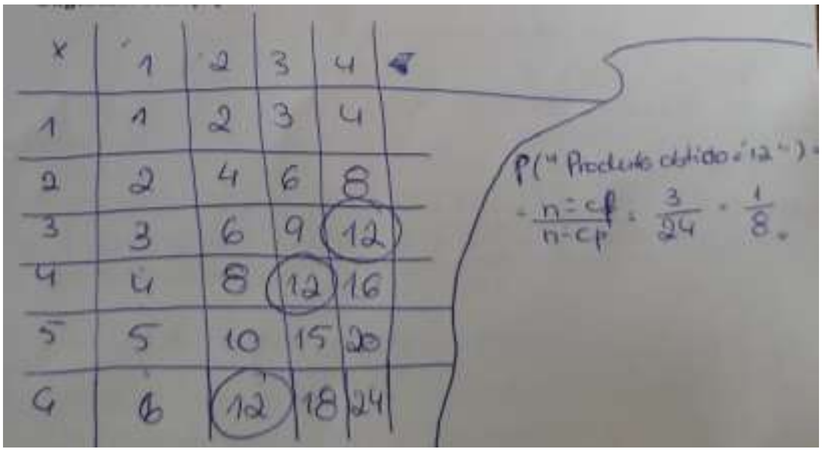


Figura 39 - Resolução de Paulo à questão 4 da ficha de avaliação

O diagrama de Venn é outra representação, já conhecida dos alunos, a que podem recorrer para auxiliar no cálculo dos casos possíveis e dos casos favoráveis a um determinado acontecimento. A ficha de trabalho I (Anexo 1.5) contempla uma questão em que é solicitado que os alunos representem os dados do enunciado através de um diagrama de Venn. Esta ficha de trabalho foi entregue aos alunos depois da representação do diagrama de Venn ter sido revista, rapidamente, em sala de aula, não tendo sido postas dúvidas pelos alunos relativamente à construção deste esquema.

No entanto, Telmo não consegue identificar (Figura 40) que existem pessoas que usam os dois detergentes, não reparando que a soma dos dados apresentados é superior às 210 pessoas inquiridas.

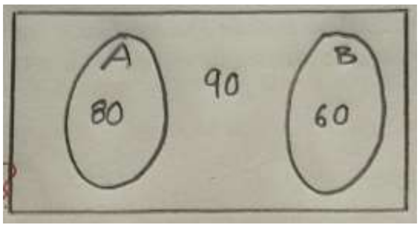


Figura 40 – Resolução de Telmo à questão 1.1 da ficha de trabalho I

Relativamente à mesma questão, Soraia apresenta o Diagrama de Venn corretamente construído. Da resolução da aluna (Figura 41) podemos verificar que esta apresenta todos os cálculos que efetua, aparentando dominar este conceito.

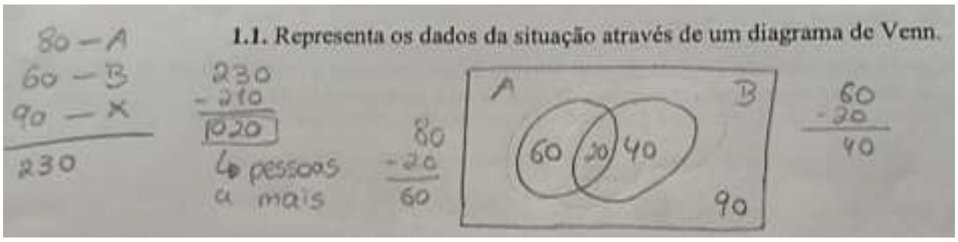


Figura 41 - Resolução de Soraia à questão 1.1 da ficha de trabalho

Paulo não entregou, tal como referido anteriormente, a ficha de trabalho resolvida pelo que não se podem retirar conclusões acerca do seu progresso.

Na ficha de avaliação foi contemplada uma questão em que os alunos deveriam de recorrer a um diagrama de Venn para representar os dados. Soraia identifica (Figura 42) que faltam seis alunos para existirem dados de todos os 24 alunos inquiridos, no entanto, não verificou que quatro alunos queriam comer ambas as sobremesas e, portanto, teriam de ser subtraídos ao número de alunos que queriam comer gelado. Este erro poderá advir da mecanização do processo de resolução de exercícios com o Diagrama de Venn. Dado que este exercício exigia um raciocínio diferente, a aluna apresentou mais dificuldades.

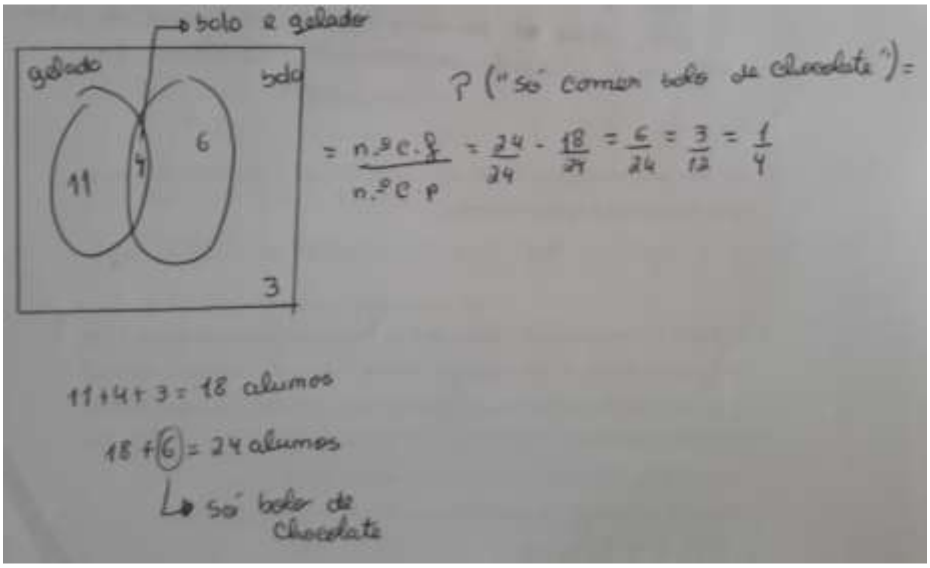


Figura 42 - Resolução de Soraia à questão 5 da ficha de avaliação

Por sua vez, Paulo identifica que os "3 que não comem sobremesa" devem ficar de fora, no entanto, não apresenta o retângulo a delimitar o diagrama de Venn, como devia (Figura 43). Analisando a sua resolução podemos concluir que o aluno não prestou atenção aos dados visto que são 24 alunos e ele usou 21. Quando questionado acerca desta situação, o aluno afirma não saber o porquê da utilização do valor 21.

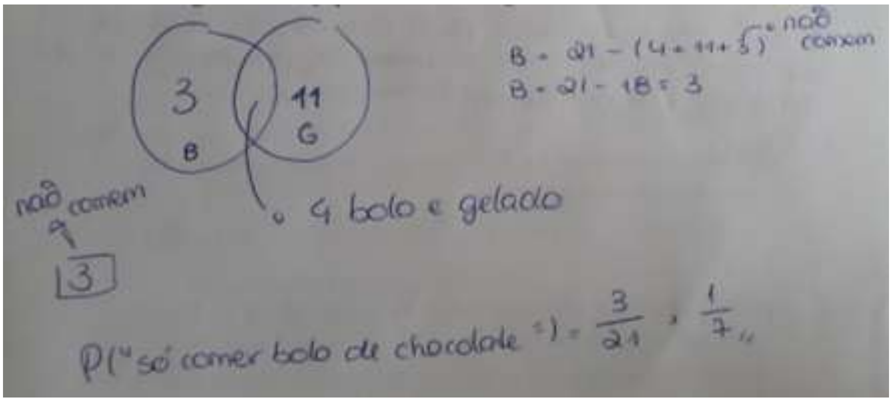


Figura 43 - Resolução de Paulo à questão 5 da ficha de avaliação

Relativamente à resolução de Telmo a esta questão (Figura 44), podemos verificar que o aluno simplesmente retira os dados do enunciado, não interpretando o significado de cada valor apresentado.

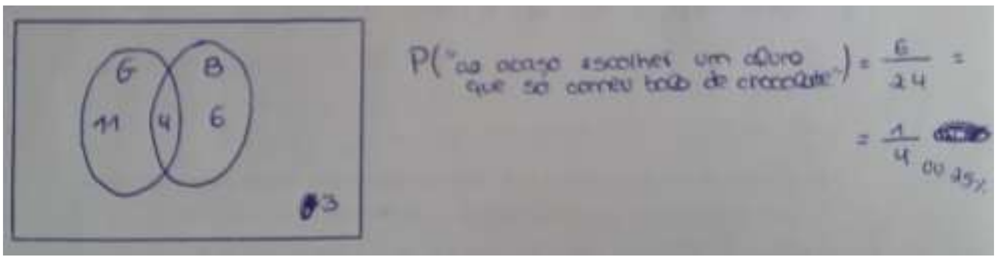


Figura 44- Resolução de Telmo à questão 5 da ficha de avaliação

Dada a permanente dificuldade dos alunos na construção do diagrama de Venn, na entrevista contemplei uma questão em que era previsto que os alunos usassem esta representação. Analisando a resolução de Soraia à questão 1.1. da entrevista (Figura 45), apuramos que a aluna compreendeu o enunciado, conseguindo extrair a informação importante para construir o diagrama de Venn, apresentando todos os cálculos que efetuou.

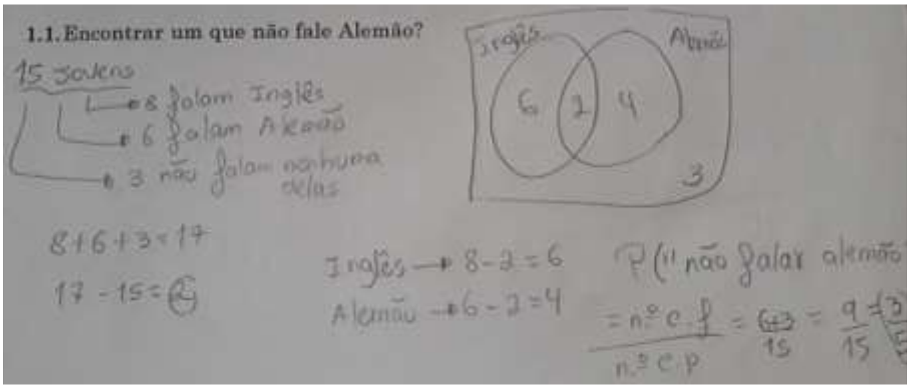


Figura 45 – Resolução de Soraia à questão 1.1 da entrevista

Analisando a resolução de Paulo à mesma questão (Figura 46), reparamos que, novamente, o aluno não apresenta o diagrama de Venn dentro de um retângulo de forma a delimitá-lo e também não apresenta a notação adequada para probabilidade de um acontecimento. Verifica-se ainda que o aluno apesenta um erro na equivalência de frações.

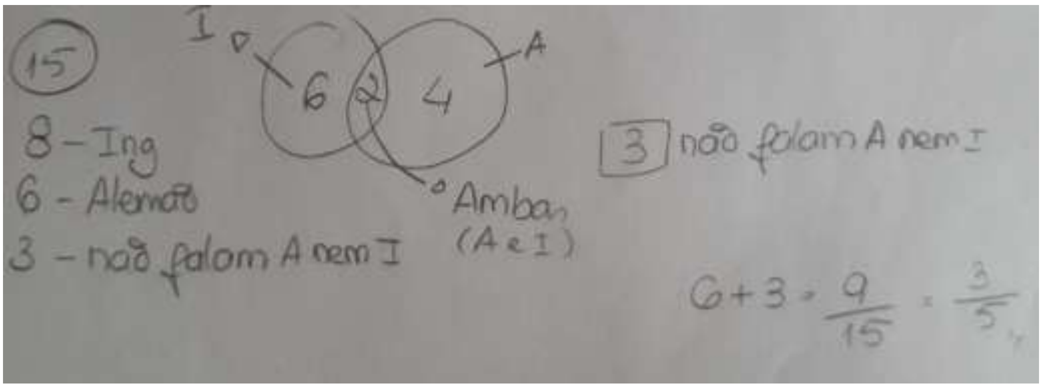


Figura 46 – Resolução de Paulo à questão 1.1 da entrevista

Em conversa com Soraia e Paulo acerca da resolução deste exercício, pude verificar como é que tinham pensado:

Professora: Ambos fizeram de forma idêntica, como é que pensaram?

Paulo: Eu juntei o 8, o 6 e o 3 e deu-me 17. Depois subtrai os 17 pelos 15 e deu-me os que falavam ambas. Como me deu 2, fui buscar os Ingleses e os Alemães e subtraí os que falavam ambas as línguas.

Professora: Depois para calcularem a probabilidade como fizeram?

Paulo: Fui buscar os Ingleses e os que não falavam nenhuma das línguas.

Professora: E que regra é que aplicaram para calcular a probabilidade?

Paulo e Soraia: Regra de Laplace.

Com este diálogo compreendi que os alunos conseguiram interpretar a situação descrita no enunciado para, posteriormente, construírem o diagrama de Venn com os dados corretos. Conclui-se ainda que os alunos sabem como construir o diagrama e que, por vezes, a dificuldade encontra-se efetivamente, na compreensão do enunciado.

Analisando a resolução de Telmo à mesma questão (Figura 47), o aluno não apresenta um diagrama de Venn ou qualquer outra representação que o auxilie na descoberta no número de casos favoráveis ao acontecimento "escolher ao acaso um jovem que não fale Alemão". O aluno limitou-se a somar os jovens que falam Inglês com os que não falam nem Inglês nem Alemão.

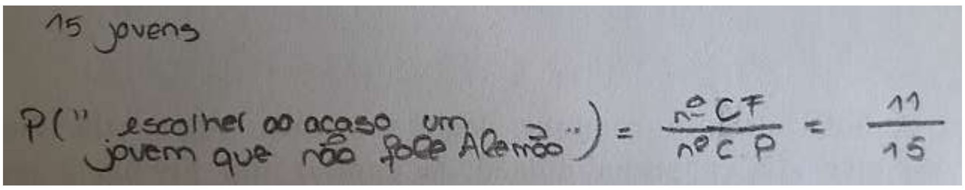


Figura 47 – Resolução de Telmo à questão 1.1 da entrevista

Aproveitei para questionar Telmo acerca da sua resolução:

Professora: Como é que fizeste nesta questão?

Telmo: Eu acho que devia ter feito o diagrama aqui… Pensei que os que não falavam nem Alemão nem Inglês e os que falam Inglês.

Professora: Mas tu mais à frente construíste o diagrama de Venn. Como é que o contruíste?

Telmo: Tirei logo as que não falavam nenhuma delas e depois tive que ver quais as que falavam Inglês, as que falavam Alemão e as que falavam as duas.

Professora: E como é que descobriste as que falavam as duas?

Telmo: Fiz…

Professora: Fizeste uma conta não foi? Que conta foi essa? Somaste…

Telmo: Sim, somei tudo e dava mais que 15.

Professora: Dá 17 e ao dar 17 significa…

Telmo: Três deles não falam nenhuma e dois deles tinham que ficar ali [apontando para a interseção dos Ingleses e dos Alemães].

Professora: Depois os que falavam só Inglês seria os oito … menos…os dois…

Telmo: Sim…

Professora: Então encontrar um que não fale Alemão… podes contabilizar estes 2?

Telmo: Não!

Professora: Mas tu contabilizaste…

Telmo: Porque fiz o diagrama depois de responder à pergunta.

Professora: Então o que é que tinhas de fazer?

Telmo: Tinha de contar 6+3.

Pela análise do diálogo com Telmo, este aparenta ter mecanizado a forma de construção desta representação, não conseguindo identificar, imediatamente, através do enunciado, a necessidade de construção do diagrama de Venn. O aluno não consegue verbalizar que a interseção do diagrama se refere aos alunos que falam ambas as línguas.

5.2.5. Síntese

Sintetizando as aprendizagens dos alunos relativamente aos conceitos do espaço amostral, podemos concluir que, ao longo da intervenção letiva, verificou-se uma evolução por parte dos alunos na compreensão de acontecimentos com conectivos lógicos. As dificuldades que surgiram na resolução dos exercícios propostos advieram de conceitos básicos de anos anteriores, nomeadamente números compostos que eram necessários para a resolução de algumas das questões propostas. Nota-se ainda uma evolução por parte dos alunos na identificação dos casos possíveis e dos casos favoráveis relativos a um determinado acontecimento, sendo capazes de mobilizar estas noções para o cálculo de probabilidades.

Analisando as resoluções dos alunos relativas à classificação de acontecimentos, verificamos que os alunos apresentavam, na sua generalidade, boas intuições, conseguindo-as aperfeiçoar ao longo da unidade didática. Apesar de apresentarem mais dificuldades na compreensão de acontecimentos complementares, incompatíveis e equiprováveis, os alunos demonstram, no final da intervenção letiva, dominar estes conceitos.

Os alunos conseguem ainda usar diagramas em árvore e tabelas de dupla entrada para auxiliar no processo de contagem dos casos favoráveis e dos casos possíveis, no entanto, apresentam dificuldades em construir diagramas de Venn ao longo da unidade didática. Esta dificuldade parece advir, essencialmente, da interpretação do enunciado e do processo de memorização do “exercício-tipo” por parte dos alunos.

5.3. Conceito de probabilidade

5.3.1. Probabilidade frequencista

A primeira questão da tarefa diagnóstico, composta por três alíneas, pretendia verificar se os alunos dominavam algumas noções de estatística descritiva, nomeadamente como calcular a frequência relativa. Cerca de 8 alunos (cerca de 35% dos alunos que realizaram a tarefa) não responderam a qualquer alínea desta questão e apenas 11 alunos (cerca de 48% dos alunos que realizaram a tarefa) responderam corretamente a todas as alíneas.

Na resolução de Soraia (Figura 48), podemos verificar que a aluna optou por fazer regras de três simples para responder ao que foi solicitado, no entanto, quando necessitou de descobrir a frequência absoluta relativamente à cor dos olhos azuis, cometeu um erro que influenciou os restantes valores da tabela. Apesar de Soraia ter conhecimento que a soma das frequências absolutas terá de dar o número total de alunos e a soma das frequências relativas, em percentagem, ser 100%, não confirmou que a soma das frequências relativas que apresentava é 86,9% e não 100% como diz ser. Estas pequenas falhas demonstram que a aluna, apesar de ter conhecimento dos conceitos, não desenvolve estratégias que lhe permitam confirmar os resultados.

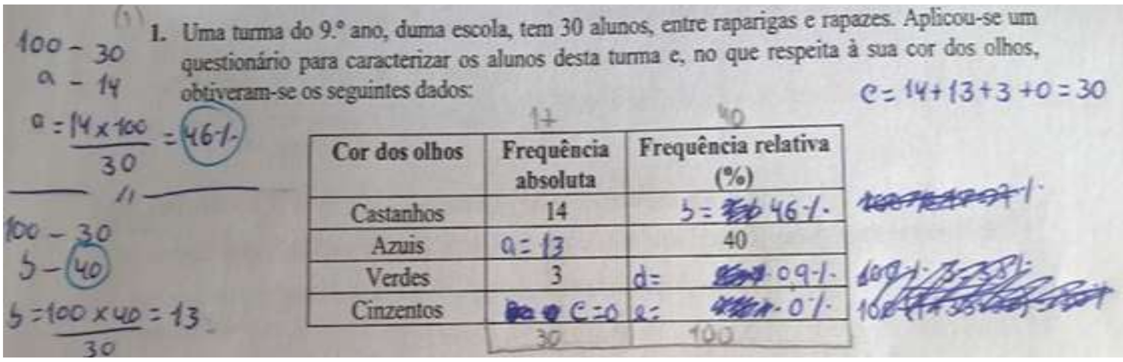


Figura 48 – Resolução de Soraia à questão 1 da tarefa diagnóstico

Paulo apresenta uma resolução (Figura 49) baseada em regras de três simples para obter os valores necessários de forma a poder preencher a tabela. Analisando com detalhe a resolução do aluno, verificamos que relativamente à cor dos olhos castanhos, o aluno apresenta dois valores para a frequência relativa como se se tratassem de valores isolados. Paulo não assume que 47% é um valor aproximado às unidades do valor da frequência relativa para essa cor dos olhos.

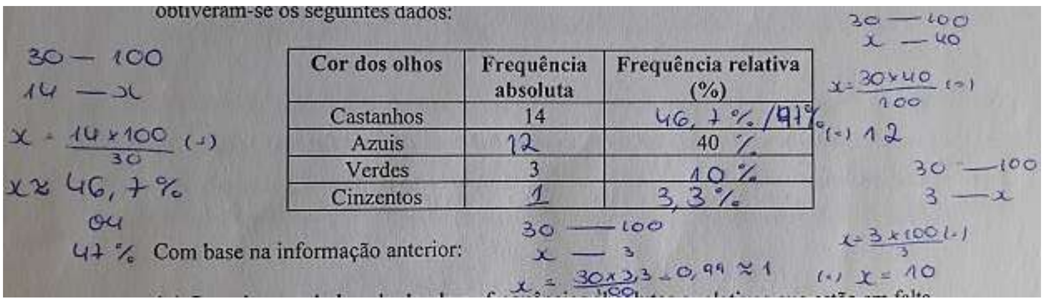


Figura 49 - Resolução de Paulo à questão 1 da tarefa diagnóstico

Por sua vez, Telmo apresenta a tabela preenchida corretamente (Figura 50) sem apresentar qualquer cálculo. Deste modo, não podemos aceder ao seu raciocínio para compreender o seu processo de resolução.

Cor dos olhos	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
Castanhos	14	46,7
Azuis	12	40
Verdes	3	10
Cinzentos	1	3,3

Figura 50 – Resolução de Telmo à questão 1 da tarefa diagnóstico

Os alunos demonstram, portanto, saber calcular frequências relativas.

Na ficha de avaliação (Anexo 1.8) contemplei uma questão em que os alunos deveriam calcular uma probabilidade, recorrendo à Lei dos grandes números. Era ainda solicitado aos alunos que justificassem adequadamente o cálculo que efetuaram.

Da justificação de Paulo (Figura 51), verificamos que este não consolidou o conceito de probabilidade frequencista, recorrendo à Lei dos grandes números. O aluno identifica que as probabilidades são diferentes nos dois registos, no entanto não compreendeu que apenas se pode aproximar a frequência relativa ao valor de uma probabilidade, caso a mesma experiência seja realizada um grande número de vezes (Lei dos grandes números).

①~~podemos~~ temos certezas de que a probabilidade é diferente porque $\frac{178}{1500} = 0,1186(6)$.

2.3.1. Com base nestes registos, qual seria a probabilidade de obter a face com o número 2 nesta experiência? Justifica a tua resposta.

② $\frac{4}{32} = 0,125$

0,125 de probabilidade de ③

Com base no registo 1 (primeiro registo), saindo cada face 4 vezes concluímos que o número 2 ~~pode~~ tem ~~...~~ ③sair assim como todos os outros. Mas no segundo registo ①

2.3.2. Podemos considerar que os acontecimentos elementares desta

Figura 51 - Resolução de Paulo à questão 2.3.1. da ficha de avaliação

Tal como Paulo, Telmo apresenta a probabilidade de "obter face com número 2" para cada registo (Figura 52) no entanto, posteriormente conclui que a probabilidade seria 12,5% uma vez que "todas as faces têm a mesma probabilidade de sair".

P("obter a face com o nº2") = $\frac{n^o\ C.F}{n^o\ C.P} = \frac{4}{32} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ ou 12,5%

P("obter a face com o nº2") = $\frac{n^o\ C.F}{n^o\ C.P} = \frac{178}{1500} = \frac{89}{750}$ ou 12% ~~...~~

A probabilidade deste acontecimento é 12,5% pois todas as faces têm a mesma probabilidade de sair.

2.3.2. Podemos considerar que os acontecimentos elementares desta

Figura 52 - Resolução de Telmo à questão 2.3.1. da ficha de avaliação

Soraia juntou os resultados obtidos no primeiro registo com os resultados obtidos no segundo registo (Figura 53), calculando o valor da probabilidade solicitada de forma mais aproximada do que se considerasse apenas o segundo registo. Apesar de conseguir calcular acertadamente o valor da probabilidade de se obter “face com o número 2”, não justifica que tal só é possível devido à Lei dos Grandes Números. No entanto, podemos considerar que a aluna consolidou este conhecimento.

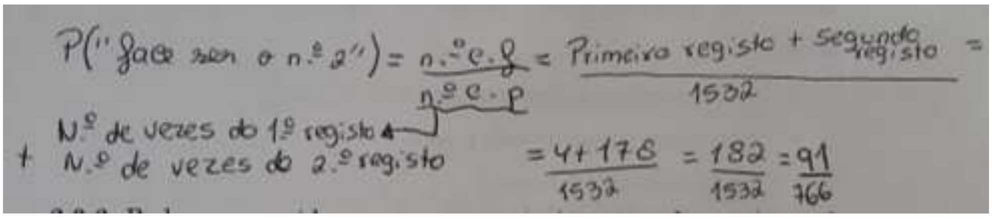


Figura 53 - Resolução de Soraia à questão 2.3.1. da ficha de avaliação

5.3.2. Probabilidade clássica (Regra de Laplace)

Na tarefa “Batalha naval das probabilidades” (Anexo 1.4) os alunos foram convidados a encontrar a forma de calcular uma probabilidade. Na verdade, esta tarefa pretendia fazer a transição entre a probabilidade frequencista e a *probabilidade clássica*. Particularmente a sexta questão, solicitava que os alunos calculassem a probabilidade de se acertar num dos barcos da frota.

Uma vez que os alunos já conheciam o conceito frequencista de probabilidade, Paulo (Figura 54) justifica que se pode encontrar a probabilidade de acertar no porta-aviões através do cálculo da frequência relativa. Recorrendo aos seus conhecimentos de estatística descritiva, o aluno compreendeu que a fração do mar que estaria ocupada seria $\frac{5}{100}$ e que este cálculo é igual ao cálculo da frequência relativa. Posteriormente, o aluno sentiu necessidade de esclarecer que o valor calculado correspondia ao valor da probabilidade pedida. Na resolução de Paulo, podemos verificar ainda que este apresenta o valor da probabilidade também em decimal e percentagem, uma vez que nas aulas anteriores, aquando da abordagem do conceito frequencista de probabilidade, a professora

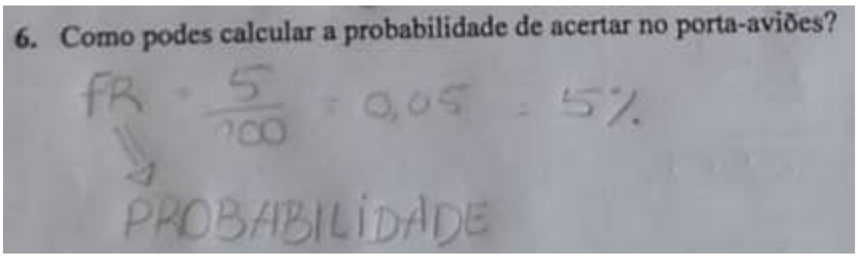


Figura 54 - Resolução de Paulo à questão 6 da tarefa “Batalha naval das probabilidades” tinha apresentado a probabilidade desta forma.

Por sua vez, Soraia (Figura 55) calcula a mesma probabilidade através de uma regra de três simples, remetendo também para a noção de frequência relativa. A aluna chega a questionar se a sua resolução se encontra correta, uma vez que pensou no “número de quadradinhos ocupados relativamente ao mar”, calculando a percentagem correspondente.

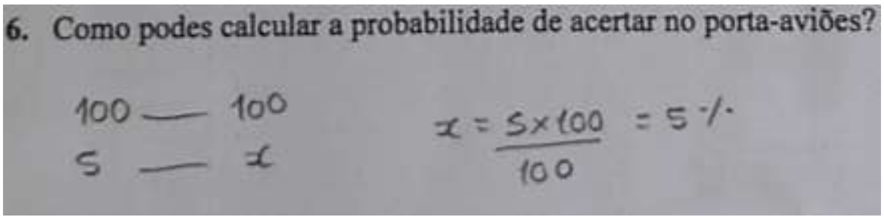


Figura 55 - Resolução de Soraia à questão 6 da tarefa Batalha naval das probabilidades

Relativamente à mesma questão, Telmo apresenta uma resolução (Figura 56) idêntica à de Paulo, no entanto não faz qualquer referência à frequência relativa.

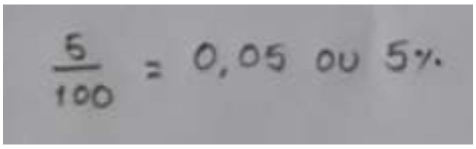


Figura 56 - Resolução de Telmo à questão 6 da tarefa Batalha Naval das Probabilidades

Podemos então concluir que os alunos recorrem aos seus conhecimentos de estatística descritiva para calcular a probabilidade do acontecimento solicitado. Todos os alunos apresentaram o resultado na forma de percentagem sendo que dois dos alunos representam ainda o valor em fração e em número decimal.

Na ficha de trabalho I (Anexo1.5), entregue no dia 8 de março, existiam diversas questões onde os alunos deveriam usar a regra de Laplace. Relativamente à questão 2.2 em que era solicitado que os alunos calculassem uma probabilidade, Soraia interpreta claramente a situação descrita (Figura 57), demonstrando conhecer a regra de Laplace, uma vez que identifica o cálculo da probabilidade como o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

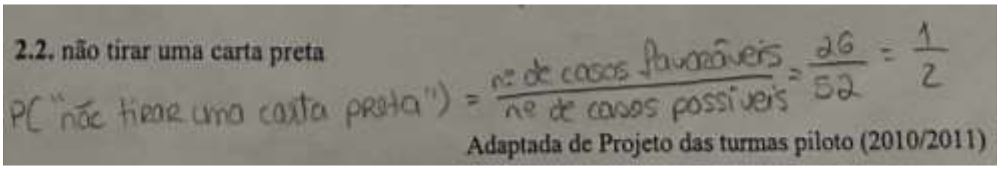


Figura 57 - Resolução de Soraia à questão 2.2 da ficha de trabalho I

Relativamente à mesma questão verifica-se que Telmo apresenta dificuldades na compreensão do enunciado (Figura 58), não conseguindo dessa forma encontrar o número de casos favoráveis correto. No entanto, o aluno identifica, claramente que a regra de Laplace permite calcular a probabilidade de um acontecimento, através do quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

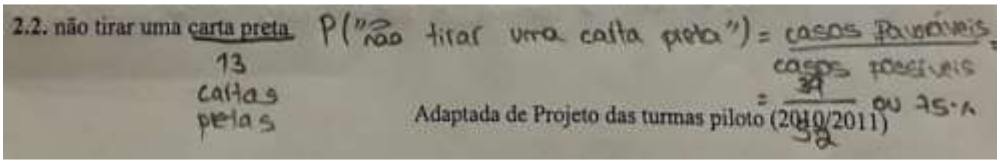


Figura 58 - Resolução de Telmo à questão 2.2. da ficha de trabalho I

Tal como referido anteriormente, Paulo não entregou a ficha de trabalho resolvida, pelo que não é possível retirar conclusões acerca deste aluno para estas questões.

Ao longo das tarefas realizadas, os alunos usaram um grande número de vezes a Regra de Laplace. Analisemos particularmente a questão 2.2.1 da ficha de avaliação (Anexo 1.8).

Telmo, tal como Soraia, apresenta claramente a forma como calcular a probabilidade (Figura 59) de "obter um número composto" usando a regra de Laplace. O aluno identifica, novamente, que a probabilidade é calculada a partir do quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. O aluno demonstra dominar este conceito, uma vez que em todas as suas resoluções apresenta a probabilidade deste modo.

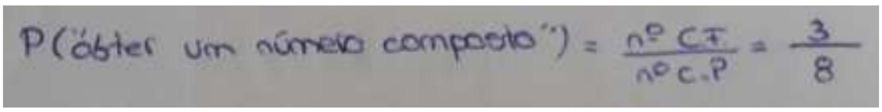


Figura 59 – Resolução de Telmo à questão 2.2.1 da ficha de avaliação

Paulo representa a probabilidade do acontecimento pelo quociente entre dois números (Figura 60), não identificando qual o significado de cada um deles. Da resolução do aluno podemos ainda extrair que este sabe identificar que a probabilidade de um acontecimento impossível é zero. No entanto, Paulo não demonstra conhecer o conceito de número composto, pelo que não obtém o número de casos favoráveis corretamente.

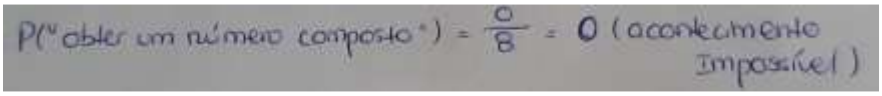


Figura 60 - Resolução de Paulo à questão 2.2.1 da ficha de avaliação

Noutras resoluções do aluno (Figura 61), como é o caso da questão 4 da ficha de avaliação (Anexo 1.8), este apresenta a probabilidade de um acontecimento como o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, pelo que podemos afirmar que o aluno domina este conteúdo.

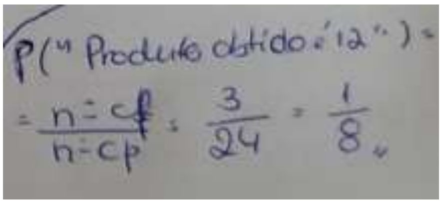


Figura 61 - Resolução de Paulo à questão 4 da ficha de avaliação

Na quinta aula (Anexo 2.5), foi solicitado aos alunos que resolvessem a questão 6 do manual. Esta questão implicava que os alunos compreendessem bem a experiência para que, posteriormente, pudessem aplicar a regra de Laplace. Considerando uma caixa com 20 lápis amarelos e 8 azuis, na primeira alínea era pedido para considerarem que "ao acaso, tirámos, sem olhar, um lápis da caixa e oferecemo-lo ao Gaspar. Qual é a probabilidade de o lápis dado ser amarelo?". Sendo uma questão que envolve uma probabilidade direta, não trouxe qualquer dificuldade para os alunos. No entanto, na segunda alínea era informado que "tirou-se mais um lápis da caixa para oferecer à Patrícia. Determina a probabilidade de o lápis oferecido à Patrícia ser azul sabendo que o lápis dado ao Gaspar era: a) amarelo; b) azul". Esta alínea suscitou diversas dificuldades de compreensão aos alunos, sendo inclusive necessário simular a experiência com um estojo e canetas para um grupo. Telmo tenta explicar ao seu grupo o exercício:

Telmo: Na primeira [a] os azuis continuam 8 e o total eram 28, mas agora são 27 porque já demos um.

Fátima: Não! Tu trocaste! Na primeira [a] é amarelo!

Filipa: Nós aqui [apontando para a] temos de tirar aos amarelos e aqui [apontando para b] temos de tirar aos azuis.

Professora: Repara no enunciado, tu já deste um lápis ao Gaspar e agora queres a probabilidade do lápis que deres à Patrícia ser azul. Depois tens duas alíneas, uma para o caso do lápis que ofereceste ao Gaspar ser amarelo e outra alínea caso seja azul.

Telmo: Isto era mais fácil com lápis! Imagina, no 6.1 saiu amarelo e tu no 6.2 a) queres saber a probabilidade de ser azul. Há 8 lápis azuis, mas o total de lápis já não é 28, agora é 27.

De facto, os alunos apresentam imensas dificuldades em compreender as condições da experiência.

Na ficha de trabalho I (Anexo 1.5), contemplei um problema que exigia uma maior compreensão por parte dos alunos. Ao não ser um exercício de aplicação direta, a generalidade dos alunos da turma demonstrou algumas dificuldades de compreensão.

Analisando a resolução de Telmo (Figura 62), o aluno recorre a uma regra de três simples para descobrir o número de turistas franceses, para posteriormente calcular a probabilidade pedida.

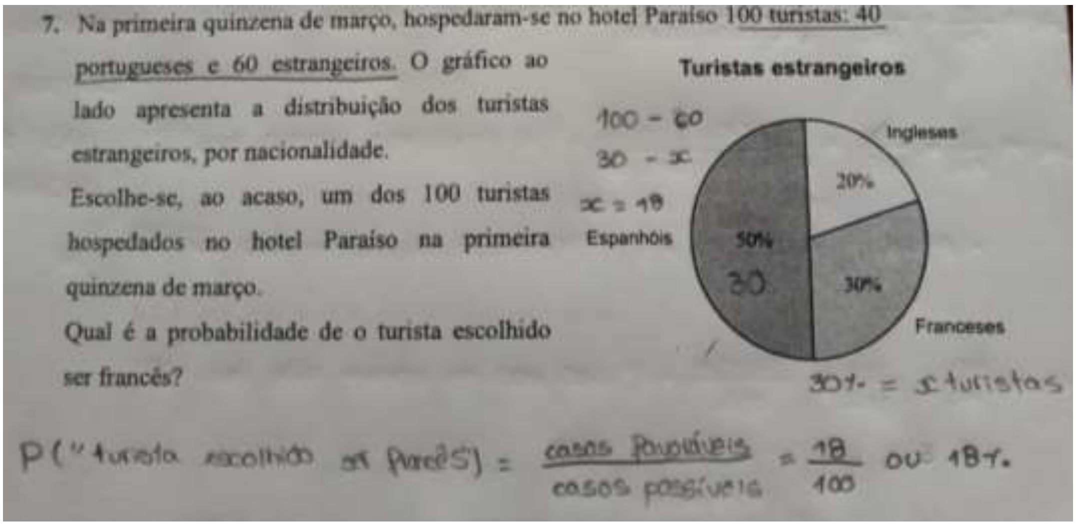


Figura 62 - Resolução de Telmo à questão 7 da ficha de trabalho I

Por sua vez, na resolução de Soraia (Figura 63) verificamos que a aluna sentiu necessidade de descobrir a quantidade de estrangeiros de cada nacionalidade, recorrendo também a regras de três simples para descobrir estes valores. Caso a aluna tivesse compreendido inicialmente o enunciado, concluía que apenas necessitava do número de Franceses.

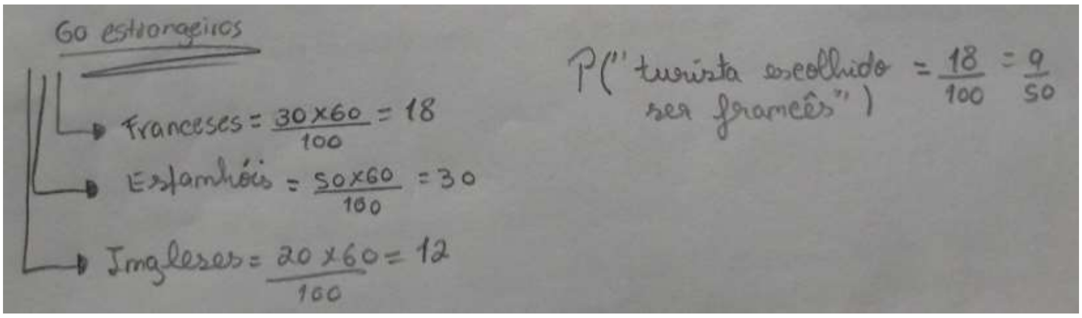


Figura 63 - Resolução de Soraia à questão 7 da ficha de trabalho I

Mais uma vez, não existe qualquer registo de Paulo para esta questão.

5.3.3. Síntese

Depois da análise dos dados relativamente aos conceitos associados à probabilidade frequencista e à regra de Laplace, verificamos que depois da probabilidade clássica ser abordada em sala de aula, os alunos passam a usá-la preferencialmente, inclusive quando é esperado que usem a Lei dos grandes números. Verifica-se então que os alunos tendem a recorrer à regra de Laplace como uma forma privilegiada de calcular a probabilidade de um acontecimento, mesmo que para tal tenham de recorrer a conhecimentos que envolvem o conceito de probabilidade frequencista, como foi o caso da ficha de avaliação.

Na presença de problemas, os alunos demonstram dificuldades na compreensão do enunciado. No entanto, os participantes evidenciaram conseguir aplicar os conhecimentos probabilísticos, mesmo em problemas.

Capítulo 6

Conclusões

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo realizado e em seguida as conclusões do mesmo, tendo em conta a problemática definida e procurando dar resposta às questões estabelecidas inicialmente. Por último, desenvolvo um balanço reflexivo sobre todo o trabalho realizado, nomeadamente sobre as aprendizagens que realizei e as dificuldades e os problemas encontrados, assim como as suas implicações para a minha prática futura como docente.

6.1. Síntese do estudo

O estudo desenvolvido com base na minha intervenção letiva realizada no Instituto de Ciências Educativas, numa turma de 9.º ano, no 2.º período do ano letivo 2017/2018, ao longo de 11 aulas, teve como objetivo compreender as aprendizagens realizadas por alunos de 9.º ano na unidade de ensino "Probabilidades". Para responder a este objetivo colocam-se duas questões de investigação: 1) Que aprendizagens realizam os alunos relativamente a conceitos associados à aleatoriedade, ao espaço amostral e ao conceito de probabilidade?; e 2) Quais as dificuldades que os alunos evidenciam na resolução das tarefas na unidade de ensino?

De acordo com o Programa de Matemática em vigor (MEC, 2013), o tópico das probabilidades contempla experiências deterministas e aleatórias, universo de resultados, casos possíveis; acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar composto, certo, impossível; acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares; experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis; definição de Laplace de probabilidade, propriedades e exemplos; problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore; comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.

No decurso da unidade de ensino, o trabalho desenvolvido em aula ocorreu maioritariamente em grupo-turma, pequenos grupos ou a pares, pré-definidos por mim. Adotei o ensino exploratório, como metodologia de trabalho privilegiada, utilizando tarefas exploratórias, exercícios e problemas. Para responder às questões de investigação utilizei uma metodologia qualitativa interpretativa. No decorrer do estudo recorri a vários métodos e instrumentos de recolha de dados, nomeadamente a observação das aulas com registo de áudio e vídeo do trabalho autónomo e das discussões em grupo turma, recolha documental das resoluções dos alunos e entrevista aos participantes do estudo.

6.2. Principais conclusões do estudo

6.2.1. Aprendizagens dos alunos relativamente a conceitos associados à aleatoriedade, ao espaço amostral e à probabilidade

Na abordagem inicial com os alunos verificou-se que estes associavam o *conceito de aleatoriedade* essencialmente a jogos de sorte e azar, demonstrando alguma resistência no que diz respeito à noção de dado viciado. Esta oposição deve-se, essencialmente, às ideias que os alunos têm do quotidiano, considerando ser impossível algum objeto ser viciado.

Apesar de, nesta fase inicial, alguns alunos apresentarem alguma resistência em compreender a diferença entre experiências aleatórias e experiências deterministas, os restantes alunos conseguiram, rapidamente, compreender a sua distinção. Aquando da realização da ficha de avaliação, todos os alunos demonstraram saber *classificar as experiências*. Tendo em conta as situações apresentadas, apesar de bastante simples, mas adequadas a este nível de escolaridade, os alunos demonstraram conhecer o conceito de aleatoriedade, assim como classificar experiências em aleatórias e deterministas.

Desde o momento em que os alunos resolveram a tarefa diagnóstico até ao final da unidade didática, estes demonstraram uma evolução no que diz respeito à compreensão de acontecimentos associados a uma experiência aleatória contemplando *conectivos lógicos*. Para este progresso dos alunos terá contribuído a utilização destes conectivos lógicos nas situações propostas aos alunos, desde o início da abordagem da unidade didática, tal como sugerido por Fernandes (1999).

Verifiquei ainda que, ao longo da unidade de ensino, os alunos foram conseguindo encontrar corretamente o número de *casos favoráveis* e o número de *cassos possíveis* relativos a um acontecimento, utilizando estes conhecimentos para calcular probabilidades bem como para classificar os acontecimentos.

No que diz respeito à classificação dos *acontecimentos em certos, impossíveis, possíveis, compostos e elementares*, os alunos demonstram dominar esta categorização, conseguindo justificar adequadamente a sua escolha. De facto, aquando da realização da tarefa diagnóstico (Anexo 1.8), os alunos já demonstravam ter boas intuições acerca do tema, que foram sendo aprimoradas ao longo da unidade didática.

No decorrer das aulas os alunos não demonstraram ter qualquer dificuldade relativamente ao conceito de *acontecimentos complementares.* No entanto, no momento de avaliação, um dos alunos selecionados equivocou-se ao classificar um único acontecimento em complementar. Na entrevista também era previsto que os alunos aplicassem este conceito para descobrir o valor de uma probabilidade, no entanto nenhum dos alunos o fez. Deste modo, verifico que quando são solicitados os casos favoráveis a cada acontecimento, os alunos conseguem rapidamente identificar acontecimentos complementares. No entanto, os alunos não conseguem utilizar a propriedade que caracteriza dois acontecimentos complementares.

O conceito de *acontecimentos equiprováveis* foi abordado em sala de aula de acordo com a recomendação de Batanero (2005), sendo abordado primeiramente com materiais manipuláveis, antes da lecionação do conceito de probabilidade clássica. Todos os alunos demonstram ter conhecimento de acontecimentos equiprováveis uma vez que, dados dois acontecimentos, conseguem identificar facilmente que a probabilidade de ambos é igual e, portanto, são equiprováveis. Considero que a facilidade de compreensão deste conceito se relaciona com a utilização de materiais manipuláveis, numa primeira fase, assim como com o uso da simulação de lançamento de uma moeda ao ar, no *Geogebra*, numa fase posterior. Montes (2017) considera que este *software* faculta ferramentas necessárias aos alunos para a compreensão deste conceito. A utilização deste *software* facilitou ainda a aprendizagem do conceito de *acontecimentos incompatíveis.* No momento de resolução da ficha de avaliação, todos os alunos demonstraram conhecer a propriedade que caracteriza estes acontecimentos, ou seja, que a sua interseção corresponde ao conjunto vazio.

Ainda entre os conceitos ligados ao espaço amostral, dei atenção ao *uso de representações no cálculo de probabilidades envolvendo acontecimentos compostos*. Na tarefa de diagnóstico, os alunos apresentavam ideias erróneas quando estavam perante experiências compostas. Efetivamente, para alunos que nunca tenham contactado com o conceito formal de probabilidade, torna-se complexo compreender estas experiências. No entanto, no final da unidade didática, todos os alunos demonstraram conseguir contruir uma tabela de dupla entrada e um diagrama em árvore, mas nem todos conseguiram construir adequadamente um diagrama de Venn, estando esta dificuldade associada à compreensão do enunciado. Montes (2017) considera que os alunos não estão habituados a experiências compostas e, portanto, muitas vezes não conseguem interpretar corretamente o enunciado. Tendo em conta que o diagrama de Venn foi abordado em anos anteriores, seria de esperar que os alunos tivessem uma maior facilidade com esta representação. Verifiquei ainda que alguns alunos associam o conceito de compatibilidade ao diagrama de Venn, por este contemplar, na sua generalidade, a interseção de, pelo menos, dois acontecimentos.

Assim, é possível concluir que, no final da intervenção letiva, quase todos os alunos demonstraram saber utilizar o diagrama em árvore, a tabela de dupla entrada e o diagrama de Venn para auxiliar na explicitação do espaço amostral assim como na determinação dos casos favoráveis a um determinado acontecimento.

Analisando as aprendizagens evidenciadas pelos alunos relativamente ao *conceito de probabilidade*, posso afirmar que, inicialmente, todos apresentavam uma noção de probabilidade ligada ao significado intuitivo, uma vez que este está relacionado com os tradicionais jogos de sorte e azar (Batanero, 2005). No entanto, no fim da intervenção letiva os alunos possuíam, claramente, uma noção de probabilidade ligada ao significado Laplaciano (Batanero, 2005), recorrendo quase sempre ao cálculo do quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis para determinar a probabilidade. Os alunos inferiram a regra de Laplace a partir da tarefa "Batalha naval das probabilidades". Esta tarefa permitiu, aos alunos, fazer uma transição do conceito frequencista de probabilidade para o clássico. No entanto, tal como verificado por Montes (2017), após a lecionação da regra de Laplace, os alunos deram-lhe sempre preferência no cálculo de probabilidades, mesmo quando era esperado que aplicassem o conceito frequencista de probabilidade.

Após a análise de dados relativa ao conceito de probabilidade, concluí que todos os alunos dominam a *regra de Laplace*. No entanto, no que diz respeito ao *conceito frequencista de probabilidade*, apenas uma aluna o conseguiu aplicar na ficha de avaliação, apesar de não justificar adequadamente que recorreu à *Lei dos Grandes Números.*

6.2.2. Dificuldades dos alunos na resolução das tarefas propostas na unidade de ensino

A investigação tem mostrado que os alunos apresentam, dificuldades na aprendizagem das probabilidades, o que vai contra a ideia de que este é um tema fácil para a generalidade dos alunos (Fernandes,1999). Nacarato e Grando (2014) consideram que uma das dificuldades apresentadas pelos alunos relaciona-se com a compreensão e interpretação do enunciado das tarefas, condicionando posteriormente a aplicação dos conceitos matemáticos. Da análise de dados verifiquei que grande parte dos alunos evidencia uma dificuldade na compreensão do enunciado das tarefas, principalmente no caso dos problemas.

Tal como evidenciado pela investigação de Fernandes, Serrano e Correia (2016), os alunos demonstram dificuldades na compreensão das condições da experiência. Nos primeiros contactos com o tema, é crucial que se utilizem materiais manipuláveis para melhorar esta compreensão por parte dos alunos. Posteriormente, ao longo da unidade didática, caso os alunos não consigam compreender as condições da experiência, deve-se utilizar materiais manipuláveis para a simular. Desta forma, os alunos conseguem compreender de forma clara o que é solicitado, conseguindo aplicar os conhecimentos necessários.

Dadas as recomendações de Fernandes (1999), os alunos efetivamente contactaram desde o princípio com estas situações, demonstrando alguns deles pequenas dificuldades. Maioritariamente as dificuldades dos alunos relacionam-se com a falta de conhecimentos de termos adquiridos em anos anteriores, como é o caso de números primos e compostos. Assim, considero que a abordagem utilizada foi benéfica, favorecendo a compreensão dos alunos relativamente à utilização destes conectivos lógicos. No entanto, é crucial que o professor reforce o significado dos termos que se consideram pré-adquiridos pelos alunos.

Tendo em conta o conceito de aleatoriedade definido por Batanero (2015), verificou-se que os alunos compreendem este conceito “uma questão de sorte”. No entanto, apresentaram alguma dificuldade em compreender noções como é o caso de "dado perfeito" e "dado viciado", não abandonando as ideias intuitivas que têm acerca destas conceções.

Os alunos demonstraram uma maior resistência em compreender o conceito "prever com exatidão". Na verdade, aquando da abordagem das experiências deterministas e experiências aleatórias, alguns alunos consideravam que podíamos "prever com exatidão" experiências em que existiam dois casos possíveis. Esta dificuldade advém das ideias intuitivas que os alunos têm do mundo que os rodeia e o significado que atribuem à exatidão.

No que diz respeito ao uso das representações no cálculo de probabilidades envolvendo acontecimentos compostos, alguns alunos demonstram, inicialmente, dificuldades na construção de diagramas em árvore e tabelas de dupla entrada. Estas dificuldades foram ultrapassadas sendo que, no momento de avaliação, todos os alunos conseguiram construir adequadamente uma tabela de dupla entrada e diagrama em árvore. No entanto, quando não é explícito no enunciado que devem recorrer a uma determinada representação, alguns alunos não sentem necessidade de o fazer. Desta forma, acabam por ter dificuldades na descoberta do espaço amostral. Também, os alunos podem não recorrer a uma representação para o cálculo de probabilidades devido a dificuldades de compreensão das condições da experiência.

A generalidade dos alunos demonstrou ter ainda dificuldades na construção do diagrama de Venn ao longo da intervenção letiva. No entanto, alguns alunos ultrapassaram estas dificuldades conseguindo posteriormente, construir diagramas de Venn. Na entrevista com os alunos selecionados verifiquei que grande parte das dificuldades neste tópico advinham exatamente da interpretação do enunciado e não da dificuldade de construção da representação, tal como verificado por Montes (2017). Outro entrave à resolução de questões envolvendo o diagrama de Venn é a mecanização dos "exercícios-tipo". Os alunos mecanizam o modo de resolução e, por vezes, o enunciado é apresentado de forma diferente pelo que acabam por não conseguir resolver o exercício.

Tal como no estudo de Montes (2017), os alunos demonstraram dificuldades ao usar o significado frequencista de probabilidade. Da análise de dados realizada, pude verificar que os alunos não distinguem as duas abordagens do conceito de probabilidade, considerando-as como uma só. A abordagem utilizada com os alunos facilitou a integração destes dois conceitos, no entanto os alunos acabaram por não conseguir distingui-los. Na ficha de avaliação em que era necessário que os alunos recorressem à Lei dos grandes números para que pudessem justificar o cálculo da probabilidade solicitada, nenhum aluno conseguiu fundamentar a sua resolução com base neste conceito.

Futuramente optaria por abordar os significados de probabilidade clássica e frequencista em paralelo, recorrendo inicialmente a uma introdução exploratória e, posteriormente, formalizaria ambos os conceitos em simultâneo, tal como sugerido por Montes (2017). Creio que desta forma, os alunos conseguiriam compreender, de forma clara, que a Lei dos grandes números é necessária para a aplicação do conceito frequencista de probabilidade.

6.3. Reflexões finais

Sendo a Matemática considerada uma das disciplinas mais difíceis para os alunos, cabe ao professor captar a atenção e gosto pela disciplina. E, este é sem dúvida um dos maiores desafios para qualquer professor.

Ao longo destes últimos dois anos muitas foram as aprendizagens desenvolvidas para que, futuramente, possa ser uma boa profissional. Mas a verdade é que apenas ao longo do último ano, me apercebi da verdadeira exigência que é ser professor. Professor não é apenas sinónimo de sabedoria, ser professor é ser responsável, é conseguir gerir uma turma por vezes de grandes dimensões, é saber controlar emoções, é ser-se dedicado!

Quando comecei a planificar a unidade de ensino senti que este trabalho era, de facto, muito difícil porque as aulas estão dependentes umas das outras e, obviamente, a planificação estará constantemente a ser alterada. Apesar do tema das probabilidades ser abordado pela primeira vez no 9.º ano, senti necessidade de aplicar uma tarefa diagnóstico para verificar quais as intuições que os alunos já tinham acerca do tema. No futuro, considero que seja crucial aplicar este tipo de tarefas, principalmente quando o professor contacta pela primeira vez com a turma, pois não tem qualquer noção dos conhecimentos que os alunos possuem acerca do tema. Desta forma, o professor também terá noção das dificuldades dos alunos, podendo-os alertar sempre que necessário para estas situações ao longo da sua intervenção.

Passar da planificação para a prática é muito mais difícil do que verdadeiramente parece. Afinal de contas, a planificação das aulas é sem dúvida essencial para o professor, no entanto, é deveras difícil conseguirmos prever todas as dificuldades dos alunos. O docente fica numa situação sensível e de maior pressão quando se depara com dificuldades imprevistas. Considero que ao longo destes dois últimos anos consegui, adquirir alguma capacidade de argumentar nestas situações inesperadas. Considero ainda que a capacidade de previsão de dificuldades irá aumentar com a experiência que o docente vai adquirindo.

A empatia que se cria com a turma é, sem dúvida, um ponto bastante benéfico para o bom decorrer de qualquer aula. Desde o 1.º período do ano letivo que estive em contacto com a turma, facilitando o processo de ganhar a confiança por parte dos alunos. No momento da minha intervenção letiva, notei que os alunos já se sentiam à vontade para me colocar qualquer questão, considerando-me como uma professora da turma.

Como professora, senti que o meu maior desafio com esta turma foi não só motivar alguns alunos menos interessados, como também conseguir gerir a sala de aula. Dado que na turma existiam alguns alunos pouco disciplinados, foi difícil gerir toda a organização e comportamento em sala de aula. O facto de os alunos trabalharem em pequenos grupos, favoreceu o trabalho colaborativo, no entanto promoveu também alguma conversa entre eles. Tenho também consciência que ao longo do tempo, o professor vai conseguindo desenvolver técnicas de gestão de sala de aula.

Ao longo do Mestrado contactei com o ensino exploratório, algo que até há dois anos atrás desconhecia por completo, uma vez que nenhum dos meus professores usou esta metodologia de ensino. Quando comecei a desenvolver a planificação da unidade de ensino tinha a certeza que queria usar o ensino exploratório na minha turma. No entanto, estava consciente que os alunos não estavam muito habituados a este tipo de trabalho, apesar de terem contactado com ele no 1.º período do ano letivo, aquando das minhas intervenções. Na minha intervenção letiva, senti que os alunos foram ficando familiarizados com este tipo de ensino passando a ser já natural para eles. Deste modo, considero que quando os alunos não estão familiarizados com um determinado método de ensino, o professor deverá fazer uma transição para que os alunos se vão habituando a este método de trabalho.

No decorrer das aulas lecionadas, verifiquei que o trabalho de colaborativo é sem dúvida benéfico, uma vez que permite um maior acompanhamento do professor a todos os alunos da turma. Penso que, por um lado, o facto de o professor escolher os grupos de trabalho torna-se benéfico, uma vez que evita possíveis maus comportamentos, assim como uma melhor distribuição dos alunos, caso o professor tenha estes aspetos em conta na criação dos grupos. No entanto, considero também que a escolha aleatória dos grupos de trabalho torna-se vantajosa para que os alunos se apercebam que terão de saber trabalhar colaborativamente com todos os colegas e não apenas com os que lhes são mais próximos.

Nos últimos dois anos confirmei que os momentos de discussão na sala de aula de matemática são, sem dúvida, dos momentos mais ricos para o bom decorrer da aula. Na minha intervenção letiva certifiquei-me exatamente que é neste momento que todos os alunos podem dar a sua opinião, pudendo trocar ideias e resoluções, diferentes das suas, com os colegas, tomando consciência da diversidade de respostas que podem existir.

Quando o professor decide recorrer a tecnologias para uso em sala de aula, terá de ter noção de todas as suas implicações. Assim, quando decidi usar o *Geogebra* em algumas aulas da unidade de ensino, não previ que houvesse problemas com os computadores disponíveis, uma vez que a mediateca continha materiais suficientes para toda a turma. No entanto, no momento da minha intervenção, deparei-me com poucos computadores em funcionamento, pelo que foi necessário encontrar uma solução para a outra aula em que estava a prever que os alunos usassem o *Geogebra.* Assim decidi explorar uma *applet* com os alunos em sala de aula, projetando a janela de visualização do *software.* Deste modo, considero que é crucial o professor planear uma alternativa para os imprevistos que possam ocorrer, principalmente quando usamos tecnologia.

No que diz respeito à investigação em educação, tenho consciência da sua importância ao longo da carreira de um docente. A investigação sobre a sua prática é crucial para que o professor possa melhorar e alterar determinadas situações. Assim o professor deve estar disposto a modificar a sua prática, caso esta impossibilite os alunos de desenvolver conhecimentos.

Enquanto futura profissional, tentarei pôr em prática todas as aprendizagens que adquiri ao longo destes dois últimos anos. Para além de grandes aprendizagens, foram dois anos de grandes desafios e sobretudo da realização de um sonho. Enquanto futura professora, tenho noção que ainda tenho muito para aprender e que só será possível com a prática

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Associação de Professores de Matemática (2001). Posição da APM sobre tecnologias na educação matemática. *Educação e Matemática, 61.* 24.

Azevedo, C. (2004). *O que é a probabilidade? Interpretações da probabilidade*. Comunicação apresentada no I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, Braga.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME, 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Chernoff, E.J., Engel, J., Lee, H.S., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Hamburg: SpringerOpen.

Batanero, C. (2015). *Understanding randomness: Challenges for research and teaching*. Apresentada em CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, República Checa.

Bellemain, F., Bellemain, P.M.B. & Gitirana, V. (2006). Simulação no ensino da matemática: um exemplo com cabri-géométre para abordar os conceitos de área e perímetro. *Anais do III Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática*. São Paulo: Águas de Lindóia.

Bernardes, O. (1987). Para uma abordagem do conceito de probabilidade. *Educação e Matemática, 3, 13.*

Bogdan, R.C. & Biklen, S.K. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Caldeira, M.F.T.H.S. (2009). *A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática.* (Tese de doutoramento). Universidad de Málaga, Málaga.

Camacho, M.S.F.P. (2012). *Materiais Manipuláveis no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática: aprender explorando e construindo* (Tese de mestrado). Universidade da Madeira, Madeira.

Canavarro, A.P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115,* 11-17.

Canavarro, A.P. & Duarte, J. (2012). Estatística e Probabilidades — das orientações curriculares à prática de sala de aula. *Educação e Matemática, 120,* 1.

Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias - Ao encontro dos "nativos digitais" com os "manipulativos virtuais". *Quadrante, XVIII* (1 e 2), 53-85.

Correia, P.F. & Fernandes, J.A. (2014). Intuições de alunos do 9º ano em acontecimentos independentes. *Zetetiké, 22* (41), 83-113.

Coutinho, C. P. (2004). Quantitativo versus qualitativo: questões paradigmáticas na pesquisa em avaliação. In *Actas do XVII Congresso da ADMEE: A avaliação de competências - Reconhecimento e validação das aprendizagens adquiridas pela experiência* (pp. 436-448). Lisboa: FPCE-UL.

Creswell, J.W. (2012). *Educational Research: planning conducting and evaluating quantitative and qualitative research.* Boston: Pearson Education.

Departamento da Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico – Competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação

Dias, A. (2015). *O uso da simulação no cálculo de probabilidades*. (Relatório de projeto). Instituto Politécnico de Leiria: Leiria.

Duque, I., Pinho, L. & Carvalho, P. (2013). Organização e tratamento de dados na Educação Pré-Escolar: Uma primeira aproximação. *Exedra, 7,* 87-99.

Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (pp. 2-7). Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.

Fernandes, J.A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de Probabilidades no 9.º Ano de escolaridade* (Tese de doutoramento). Universidade do Minho, Braga.

Fernandes, J.A., Bernabeu, C.B., García, J.M.C. & Batanero, C.D. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante, XVIII* (1 e 2), 161-183.

Fernandes, J.A., Serrano, M.M.G., & Correia, P.F. (2016). Definição de acontecimentos certos na extração de berlindes de um saco. *Acta Scientiae, 18*(1), 83-100.

Guimarães, H.M. (2014). Resolução de problemas, pois claro. *Educação e Matemática, 130,* 1.

Henriques, A. & Oliveira, H. (2017). Contributos da investigação para o ensino da Estatística e das Probabilidades. *Educação e Matemática, 144-145,* 21-26.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practices. *Journal of Mathematical Behavior, 16(2),* 145-165.

IEUL (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 - 15 de março de 2016. Disponível em http://www.ie.ulisboa.pt/investigacao/comissao-de-etica

Lima, R.C., Bezerra, F.J.B. & Valverde, M.A.H. (2016). *Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades.* São Paulo SBEM.

Martins, M.E.G & Ponte, J.P. (2010). *Organização e tratamento de dados.* Lisboa: DGIDC.

Martins, M.E.G. (2011). Como estimar a Probabilidade dum acontecimento por Simulação. *Actas do PROFMAT 2011* (pp. 1-16). Lisboa: APM.

Mendoza, L.P. & Swift, J. (1989). Porquê ensinar estatística e probabilidades. *Educação e Matemática, 9,* 17-18.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação (2017) *Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória*. Consultado em: https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Monteiro, C.E.F. & Martins, M.N.P. (2016). Possibilidades de recursos para o ensino de probabilidade nos anos iniciais. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 7(1),* 1-20.

Montes, G.R. (2017). *A aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade com recurso ao Geogebra: um estudo com alunos da Costa Rica*. (Dissertação de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Nacarato, A. M., & Grando, R. C. (2014). The role of language in building probabilistic thinking. *Statistics Education Research Journal, 13(2),* 93-103.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (3ªedição). Lisboa: APM.

NCTM (1999). *Normas para a avaliação em Matemática.* Lisboa: APM.

NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM (2014). *Principles to Actions: ensuring mathematical success for all.* USA: CCC.

Neves, M.A.F. & Silva, A.P. (2017). *Matemática- parte 2.* Porto: Porto Editora.

Nunes, F. (1996). *Será de ir em grupos na aprendizagem da matemática?.* Apresentada em ProfMat, Almada.

Ponte, J. (1995). Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação e Matemática, 34,* 2-7.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H.M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E.G. & Oliveira, P.A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Precatado, A. (2009). Tecnologia para os alunos ou ensino com tecnologia?. *Educação e Matemática, 104,* 1.

Raposo, R. P. (2011). Novas ferramentas, dentro e fora da sala de aula. *Educação e Matemática, 113,* 37-42.

Sánchez, E. & Valdez, J.C. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 127 – 143.

Santos, L. & Ponte, J. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante, XXI (2), 29-54.*

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. *Actas EIEM 2008* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Sousa, P. (2005). *O ensino da matemática: contributos pedagógicos de Piaget e Vygotsky*. Consultado a 25 de Maio de 2018 em http://matematicauva.org/disciplinas2/teorias_aprendizagem/Texto_01_Socio_Interacionismo.pdf

Vale, I., Pimentel, T. & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante, XXIV (2), 39-60.*

Veiga, F., Caldeira, S. & Melo, M. (2013). Gestão da Sala de Aula: Perspetiva Psicoeducacional. In Veiga, F. (Coord.). *Psicologia da Educação - Teoria, Investigação e Aplicação: Envolvimento dos Alunos na Escola* (p.543-581). Lisboa: Climepsi Editores.

Legislação consultada

Despacho normativo nº66/2016, Diário da República, 2ª Série, 5 de abril de 2016.

Anexos

Anexo 1 – Tarefas propostas

Anexo 1.1. – Tarefa diagnóstico

1. Uma turma do 9.º ano, duma escola, tem 30 alunos, entre raparigas e rapazes. Aplicou-se um questionário para caracterizar os alunos desta turma e, no que respeita à sua cor dos olhos, obtiveram-se os seguintes dados:

Cor dos olhos	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa (%)**
Castanhos	14	
Azuis		40
Verdes	3	
Cinzentos		

Com base na informação anterior:

1.1. Completa a tabela calculando as frequências absolutas e relativas que estão em falta.

1.2. Qual a cor de olhos que está menos presente na turma? Explica a tua resposta.

____

____

1.3. Quantos alunos têm a cor de olhos predominante da turma?

____

____

2. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tira-se uma bola do saco.

Diz se se obtém **sempre**, **algumas vezes** ou **nunca**:

a) Uma bola branca	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca
b) Uma bola cinzenta	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca
c) Uma bola vermelha	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca
d) Uma bola não vermelha	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca

3. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco. Depois de se colocarem de novo as duas bolas no saco, tiram-se, sem ver, novamente duas bolas do saco. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Diz se se obtém **sempre**, **algumas vezes** ou **nunca**:

a) uma bola branca e uma bola preta	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca
b) duas bolas cinzentas	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca
c) uma das duas bolas não cinzenta	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca
d) uma bola branca e outra não branca	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca
e) uma das duas bolas branca ou preta	☐ Sempre	☐ Algumas vezes	☐ Nunca

4. Um **saco I** contém **duas bolas brancas** e **três bolas pretas**, e um **saco II** contém **três bolas brancas** e **duas bolas pretas**. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos. Depois de se colocarem de novo as bolas nos respetivos sacos, tira-se, sem ver, novamente uma bola de cada um dos sacos. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco I:  Saco II: 

De qual dos sacos se obtém **mais vezes** uma bola branca?

☐ Do saco I

☐ Do saco II

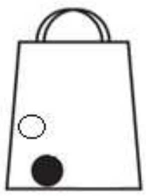
☐ Obtém-se aproximadamente o mesmo número de vezes uma bola branca de qualquer um dos sacos

4.1. Explica como pensaste.

____

____

5. Um **saco I** contém **uma bola branca e uma bola preta**, e um **saco II** contém **duas bolas brancas e duas bolas pretas**. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I:  Saco II: 

De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I

☐ Do saco II

☐ Obtém-se aproximadamente o mesmo número de vezes uma bola branca de qualquer um dos sacos

5.1. Explica como pensaste.

____

____

6. Lançam-se **dois dados** de uma só vez e conta-se o número de pintas das faces que ficam voltadas para cima.

Qual das situações é mais provável?

- ☐ Obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado
- ☐ Obter o número 6 em ambos os dados
- ☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis

7. Lançam-se um grande número de vezes **duas moedas** ao ar de uma só vez e registam-se, em cada lançamento, as faces que ficam viradas para cima.

Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

- ☐ A face nacional em ambas as moedas
- ☐ A face europeia em ambas as moedas
- ☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

Bom trabalho!

Anexo 1.2. – Tarefa I

Parte I

Existem situações do dia-a-dia em que conseguimos prever com exatidão o resultado de uma certa ação ou experiência, no entanto, há outras em que não o conseguimos fazer com total certeza.

Considera as experiências seguintes:

<table>
<tr>
<td>A: Girar uma roleta com números entre 1 e 12 e verificar que número se obtém.
</td>
<td>B: Lançar um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 e verificar que número fica na face voltada para cima.
</td>
</tr>
<tr>
<td>C: Atirar uma pedra ao rio e verificar se flutua ou se se afunda.
</td>
<td>D: Ao colocar umas gotas de azeite num copo de água, observar se o azeite se dissolve ou não.
</td>
</tr>
<tr>
<td>E: Lançar uma moeda ao ar no início de um jogo de futebol e observar se se obtém face nacional ou face europeia.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

1. Classifica cada uma das experiências anteriores num dos dois grupos, A ou B:

A) É possível prever com exatidão o resultado da experiência: ______________________

B) Não é possível prever com exatidão o resultado da experiência: ___________________

2. Para cada uma das experiências anteriores, indica o conjunto de resultados que se podem obter.

A: ____

B: ____

C: ____

D: ____

E: ____

Parte II

Um saco contém seis bolas numeradas de 1 a 6. Considera a **experiência aleatória** que consiste em retirar uma bola do saco e registar o seu número.

1. Qual é o universo de resultados?

2. Existe algum número que seja mais provável sair? Porquê?

3. É possível sair uma bola com o número 0? Porquê?

4. Quão provável é sair uma bola com um número menor que 7? Porquê?

5. Quantas possibilidades existem de sair uma bola com o número 1?

6. Que possibilidades existem de sair uma bola com um número superior a 4?

Anexo 1.3. – Tarefa “Estará equilibrada? *”

Parte I

As turmas 9.º A e 9.º B do ICE encontram-se na final de um torneio de futsal. Para decidir a equipa que sai com a bola, o árbitro da partida faz o lançamento de uma moeda ao ar. Caso saia face europeia (E), a equipa do 9.º A iniciará a partida; se sair face nacional (N), será a equipa do 9.º B.

1. Existe alguma face que tenha maior probabilidade de ficar voltada para cima? Se sim, qual? Explica.

2. No lançamento da moeda saiu face europeia. Como no jogo anterior, usando a mesma moeda, também tinha saído face europeia, o capitão da equipa do 9.º B, desconfiado de que a moeda pudesse estar viciada, pediu um novo lançamento.

Para que não restassem dúvidas, os capitães das duas equipas e o árbitro decidiram realizar dez lançamentos dessa mesma moeda. Os resultados obtidos foram os seguintes:

E E N E E E E E E N

Depois de analisar os resultados, o capitão da equipa do 9.º B afirmou:

“A moeda está viciada! Assim não é justo! Tínhamos apenas 20% de hipóteses de começar a partida com bola, pois, nos dez lançamentos da moeda efetuados, apenas por duas vezes saiu face nacional.”

Concordas com a afirmação do capitão da equipa do 9.º B? Explica.

3. Simula agora esta experiência, lançando 10 vezes ao ar uma moeda de 1€ e registando os resultados. Representa a face nacional por N e a face europeia por E, na seguinte tabela:

Lançamento	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Face										

3.1. De acordo com a experiência que simulaste, manténs a tua opinião quanto à questão 1? Porquê?

3.2. Determina a frequência relativa de cada uma das faces.

3.3. Achas que a moeda que utilizaste é perfeita ou esta privilegia uma face em relação a outra? Justifica a tua resposta.

Parte II

Vais agora realizar a mesma experiência através de uma simulação no *Geogebra*. No ficheiro *Lançamento de uma moeda* poderás:

- no botão "Lançamento", lançar uma moeda ao ar;
- no botão "Começar", recomeçar a simulação;
- no lado esquerdo tens uma tabela com as frequências absolutas e as frequências relativas das faces da moeda ao longo dos lançamentos que efetuaste;
- no lado direito tens uma representação gráfica das frequências absolutas de ambas as faces da moeda ao longo dos lançamentos que efetuaste;

1. Efetua 30 lançamentos de uma moeda de 1€, carregando sucessivamente no botão "Lançamento", até atingir o número desejado de lançamentos.

1.1. Qual a frequência relativa de cada uma das faces? Compara-as.

2. Agora, faz a mesma experiência, mas efetuando 100 lançamentos.

2.1. Qual a frequência relativa de cada uma das faces? Compara-as.

3. Agora, faz a mesma experiência, mas efetuando 150 lançamentos.

3.1. Qual a frequência relativa de cada uma das faces? Compara-as.

4. Após estas experiências, como responderias ao capitão da equipa do 9.ºB?

* Tarefa adaptada do manual *Pi 9* (2017)

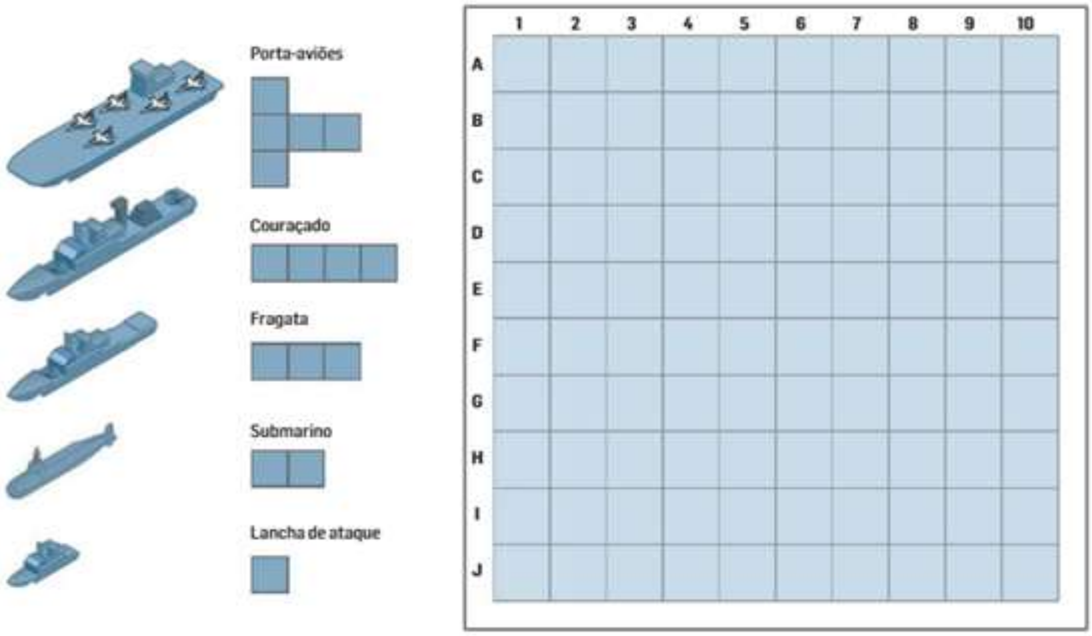
Bom trabalho!

Anexo 1.4. – Tarefa “Batalha naval das probabilidades*”

A batalha naval é um jogo de tabuleiro, para dois jogadores, no qual cada jogador tenta adivinhar o local onde se encontram os navios do adversário.

O tabuleiro deste jogo tem a forma de um quadrado, em que cada um dos seus lados está dividido em dez partes iguais, perfazendo um total de 100 quadradinhos de iguais dimensões onde se dispõem os barcos que o adversário tentará afundar.

De seguida encontra-se representado um tabuleiro de jogo e a frota que cada um dos jogadores tem à sua disposição. Para simplificar, considera que cada jogador dispõe de apenas um barco de cada tipo.



1. No início do jogo, quantas posições pode optar um jogador para atacar o seu adversário?

2. Qual é o barco em que é mais provável acertar? Explica o teu raciocínio.

3. Com o primeiro tiro, é mais provável acertar-se numa fragata ou num dos dois barcos de menores dimensões (submarino e lancha de ataque)? Explica o teu raciocínio.

4. Ao lançar o primeiro tiro, há mais possibilidades de acertar num barco ou na água? Explica o teu raciocínio.

5. Que fração do mar está ocupada por cada um dos barcos?

6. Como podes calcular a probabilidade de acertar no porta-aviões?

* Adaptado de Montes (2017) e manual Pi 9 (2017)

Bom trabalho!

Anexo 1.5. – Ficha de trabalho I*

1. Interrogaram-se 210 pessoas acerca da utilização de dois detergentes: A e B. Oitenta declararam usar o detergente A, sessenta o detergente B e noventa declararam não usar nenhum desses detergentes.

1.1. Representa os dados da situação através de um diagrama de Venn.

1.2. Selecionou-se, ao acaso, uma das 210 pessoas. Calcula a probabilidade de ela:

1.2.1. usar apenas o detergente A

1.2.2. usar apenas o detergente B

1.2.3. não usar nenhum dos dois detergentes.

1.2.4. usar, pelo menos, um dos dois detergentes.

2. A Margarida vai tirar à sorte uma carta do baralho de 52 cartas. Calcula a probabilidade de tirar:

2.1. um rei

2.2. não tirar uma carta preta

3. Num banco trabalham 600 funcionários, alguns dos quais têm filhos, outros não, distribuídos de acordo com a tabela ao lado.

	Homens	Mulheres
Tem filhos	220	260
Não tem filhos	90	30

Se escolhermos um funcionário do banco ao acaso, indica a probabilidade desse funcionário:

3.1. ser mulher

3.2. não ter filhos

3.3. ser homem e ter filhos

4. Num artigo de novembro de 2001, o *Boston Sunday Globe* indicava a probabilidade de uma pessoa morrer devido a uma picada de aranha, de abelha ou a uma dentada de cão.

Dentada de Cão	Picada de abelha	Picada de aranha
1 em 18 milhões	1 em 6 milhões	1 em 54 milhões

4.1. Seleciona a opção verdadeira.

(A) A probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de aranha é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma dentada de cão.

(B) A probabilidade de uma pessoa morrer com uma dentada de cão é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de aranha.

(C) A probabilidade de uma pessoa morrer com uma dentada de cão é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de abelha.

(D) A probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de abelha é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de aranha.

4.2. A probabilidade de uma pessoa ganhar o Euromilhões, fazendo apenas uma aposta, é cerca de $1{,}3 \times 10^{-8}$. O que é mais provável: uma pessoa ganhar o Euromilhões, fazendo apenas uma aposta, ou morrer com uma picada de abelha? **Justifica a tua resposta.**

5. Das experiências seguintes, indica, as que são aleatórias e as que são deterministas.

a) Rodar um dado tetraédrico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 4 e registar o número inscrito na face que fica voltada para cima.

b) Lançar um dado cúbico equilibrado com todas as faces numeradas com o número 1 e registar o número inscrito na face que fica voltada para cima.

c) Espetar uma agulha num balão cheio de ar e verificar o que acontece ao balão.

d) Retirar uma carta de um baralho de cartas de jogo, com quatro naipes distintos, e registar o seu naipe.

Experiências aleatórias: ___________________

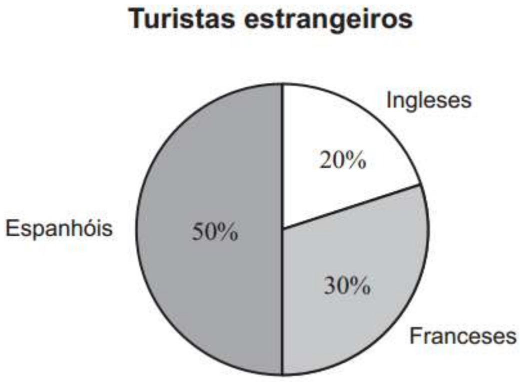
Experiências deterministas: ________________

6. Num café estão 20 pessoas. Sabendo que 8 são mulheres, indica a probabilidade de ao escolher uma das pessoas ao acaso, escolhermos um homem?

7. Na primeira quinzena de março, hospedaram-se no hotel Paraíso 100 turistas: 40 portugueses e 60 estrangeiros. O gráfico ao lado apresenta a distribuição dos turistas estrangeiros, por nacionalidade.

Escolhe-se, ao acaso, um dos 100 turistas hospedados no hotel Paraíso na primeira quinzena de março.

Qual é a probabilidade de o turista escolhido ser francês?



***** Adaptada do Projeto das turmas piloto (2010/2011)

Bom trabalho!

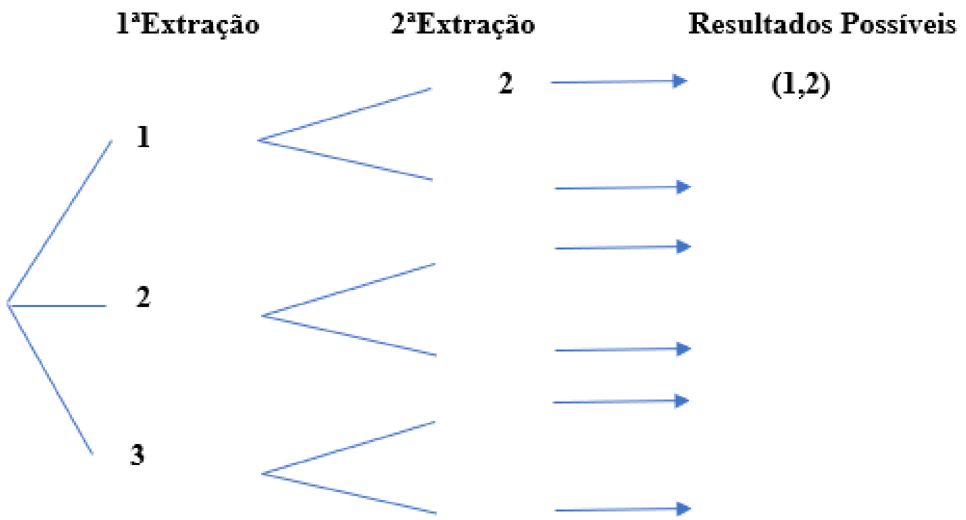
Anexo 1.6. – Ficha informativa

1. Um saco contém três bolas, numeradas de 1 a 3, indistinguíveis ao tato. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar sucessivamente, sem reposição, duas bolas do saco e verificar os números nelas inscritos.

Determina a probabilidade da **primeira bola ser um número par** e **a segunda bola ser um número ímpar**.

Vejamos duas representações possíveis que nos permitem calcular esta probabilidade.

Diagrama em árvore



Temos assim o seguinte espaço amostral:

$$E = \{(1,2), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

Número de casos possíveis: ____ **Número de casos favoráveis:** ____

$$P(\text{"1ª bola ser um número par e a 2ª bola ser um número ímpar"}) =$$

Tabela de dupla entrada

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">2ª Extração</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1ª Extração</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>(1,1)</td><td>(1,2)</td><td>(1,3)</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Em ambas as representações obtivemos o espaço amostral:

$$E = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$$

Número de casos possíveis: 6 **Número de casos favoráveis**: 2

$$P(\text{"1ª bola ser um número par e a 2ª bola ser um número ímpar"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. Lançaram-se dois dados cúbicos equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6. De seguida, **somaram-se** os números obtidos na face que ficou voltada para cima em cada um dos dados.

2.1. Qual o espaço de resultados para esta experiência aleatória?

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$E = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \}$

2.2. Qual a probabilidade de se obter a soma igual a 6?

$P(\text{"a soma ser igual a 6"}) =$

2.3. Qual a probabilidade de a soma ser um número par?

$P(\text{"a soma ser um número par"}) =$

2.3.1. Classifica o acontecimento anterior.

Acontecimento

2.4. Qual a probabilidade da soma ser um múltiplo de 3 e de 5?

$P(\text{"a soma ser um múltiplo de 3 e de 5"}) =$

2.4.1. Classifica o acontecimento anterior.

Acontecimento

2.5. Qual a probabilidade de a soma não ser um número primo nem um número composto?

$P(\text{"soma não ser um nº primo nem composto"}) =$

2.5.1. Classifica o acontecimento anterior.

Acontecimento

Anexo 1.7. – Ficha de trabalho II

1. Na escola da Eduarda e do Daniel, vão ser realizadas sessões de divulgação de cursos de Espanhol e de Alemão. Essas sessões distribuem-se de acordo com o horário seguinte.

	Sala 3	Sala 4	Sala 5
15h30 – 16h30	Espanhol	Espanhol	Espanhol
17h00 – 18h00	Alemão	Alemão	

1.1. A Eduarda pretende assistir a uma sessão de divulgação do curso de Espanhol e vai escolher, ao acaso, uma sala.

Qual é a probabilidade de a Eduarda escolher uma sala com número par?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

1.2. O Daniel pretende assistir a uma sessão de divulgação de cada um dos cursos e vai escolher, ao acaso, uma sala para assistir à sessão de Espanhol e uma sala para assistir à sessão de Alemão.

Qual é a probabilidade de o Daniel escolher salas com números diferentes?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

2. Em cada jogada do Jogo do Monopólio lançam-se dois dados numerados de 1 a 6 e adicionam-se o número de pintas das duas faces que ficam voltadas para cima.

2.1. Qual é o espaço amostral nas condições anteriormente descritas?

2.2. Considera os seguintes acontecimentos:

A : "$Obter\ um\ número\ maior\ que\ 11$"

B : "$Obter\ o\ número\ zero$"

C : "$Não\ obter\ um\ número\ negativo$"

D : "$Obter\ um\ número\ par$"

2.2.1. Classifica os acontecimentos referidos.

2.2.2. Identifica os acontecimentos associados à experiência:

2.2.2.1. $A \cap B$

2.2.2.2. $A \cap C$

2.2.2.3. $\overline{A}$

2.2.2.4. $\overline{A \cap B}$

Anexo 1.8. – Ficha de avaliação

1. Considera que os seguintes cartões com os algarismos estão dentro de um saco.

Retiram-se os três cartões do saco e formam-se números: o primeiro cartão ocupa a ordem das centenas, o segundo cartão ocupa a ordem das dezenas e o terceiro cartão ocupa a ordem das unidades.

1.1. Escreve o universo de resultados desta experiência aleatória.

1.2. Classifica cada um dos seguintes acontecimentos, justificando.

A: Escrever números de três algarismos.

B: Escrever números ímpares.

C: Escrever números pares.

2. O dado da figura tem a forma de um octaedro regular. As suas 8 faces triangulares estão numeradas de 1 a 8 e têm igual probabilidade de sair, quando se lança o dado. Considera a experiência que consiste em lançar o dado e verificar qual o número que fica na face voltada para baixo.

2.1. Os acontecimentos “obter um número divisor de 8” e “obter um número par” são equiprováveis? Porquê?

2.2. Determina qual é a probabilidade de:

2.2.1. Obter um número composto.

2.2.2. Não obter um divisor de 4.

2.2.3. Não obter um número composto.

2.3. Repetiu-se a experiência de lançar o dado várias vezes, mas com duas pessoas, havendo, portanto, dois registos independentes desta experiência apresentados nas seguintes tabelas:

Primeiro registo	
Face	**Número de vezes obtida**
1	4
2	4
3	4
4	4
5	4
6	4
7	4
8	4

Segundo registo	
Face	**Números de vezes obtida**
1	188
2	178
3	185
4	181
5	239
6	179
7	170
8	180

2.3.1. Com base nestes registos, qual seria a probabilidade de obter a face com o número 2 nesta experiência? Justifica a tua resposta.

2.3.2. Podemos considerar que os acontecimentos elementares desta experiência são equiprováveis? Justifica a tua resposta.

3. Se dois acontecimentos A e B, são incompatíveis, então pode afirmar-se que: **(Assinala a opção correta)**

□ $A \cap B = S$ □ $A \cap B = \emptyset$ □ $A \cup B = \emptyset$ □ $A \cup B = S$

4. O Pedro lançou um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um dado com a forma de um tetraedro regular, com as faces numeradas de 1 a 4. De seguida registou o produto dos números das faces que ficaram voltadas para baixo. Admitindo que ambos os dados são equilibrados, determina a probabilidade do produto obtido ser 12.

Sugestão: Começa por construir uma tabela de dupla entrada.

5. Num jantar organizado pelos 24 alunos do 9ºB, perguntaram a todos os alunos se queriam comer gelado de morango ou bolo de chocolate à sobremesa.

- 11 responderam que queriam comer gelado
- 4 queriam comer gelado e bolo
- 3 não comem sobremesa

Calcula a probabilidade de, escolhendo ao acaso um aluno, ele só comer o bolo de chocolate.

Sugestão: Começa por construir um diagrama de Venn.

Bom trabalho!

Item	**1.1**	**1.2**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Cotação	15	15	10	15	10	5	15	15	100

Anexo 1.9. – Tarefa “Entrevista”

1. Num jantar há 15 jovens que falam diferentes línguas: 8 falam Inglês, 6 falam Alemão e 3 não falam nem Inglês nem Alemão.

Determina a probabilidade de, escolhendo um jovem ao acaso:

1.1. Encontrar um que não fale Alemão.

1.2. Encontrar um que saiba falar Inglês ou Alemão.

2. Na escola do Manuel vão montar uma barraquinha para vender 1500 rifas e o Manuel ficou responsável pela sua venda. Observa o que o Manuel disse à Sofia.

2.1. Quantas rifas têm prémio?

2.2. A Sofia foi a primeira pessoa a comprar uma rifa, mas não lhe saiu nenhum prémio.

2.2.1. Qual era a probabilidade de tal acontecer?

2.2.2. A Sofia decidiu comprar, logo a seguir, outra rifa. Nesta segunda rifa, a probabilidade de ganhar um prémio é igual, maior ou menor do que em relação à primeira rifa? Justifica a tua resposta.

Anexo 1.10. – Guião "Entrevista"

1. Num jantar há 15 jovens que falam diferentes línguas: 8 falam Inglês, 6 falam Alemão e 3 não falam nem Inglês nem Alemão.

Determina a probabilidade de, escolhendo um jovem ao acaso:

1.1. Encontrar um que não fale Alemão?

Como é que pensaste?

Como se calcula a probabilidade? Que regra aplicaste?

Quantos são os casos favoráveis? E os casos possíveis?

1.2. Encontrar um que saiba falar Inglês ou Alemão.

Como é que pensaste?

Quais são os sabem falar Inglês ou Alemão?

2. Na escola do Manuel vão montar uma barraquinha para vender 1500 rifas e o Manuel ficou responsável pela sua venda. Observa o que o Manuel disse à Sofia.

2.1. Quantas rifas têm prémio?

Como é que pensaste?

2.2. A Sofia foi a primeira pessoa a comprar uma rifa, mas não lhe saiu nenhum prémio.

2.2.1. Qual era a probabilidade de tal acontecer?

Como calculas essa probabilidade?

Quantos são os casos favoráveis? E os casos possíveis?

Podes calcular a probabilidade sem recorrer à regra de Laplace?

2.2.2. A Sofia decidiu comprar, logo a seguir, outra rifa. Nesta segunda rifa, a probabilidade de ganhar um prémio é igual, maior ou menor do que em relação à primeira rifa? Justifica a tua resposta.

Como é que pensaste?

Os casos favoráveis são os mesmos? E os casos possíveis?

Quais foram as dificuldades que sentiste a fazer a tarefa?

Anexo 2 – Planificações das aulas

Anexo 2.1. – Plano da aula 1

Turma: 9ºB	**Tempo:** 90 min	**Data:** 28 de fevereiro
Sumário: Início do estudo das probabilidades. Experiências deterministas e experiências aleatórias. Universo de resultados. Classificação de acontecimentos.		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Experiências e conjunto de resultados. Experiência aleatória e experiência determinista. Acontecimentos. Casos possíveis e casos favoráveis. Classificação de acontecimentos.

Objetivos
- Reconhecer situações aleatórias que envolvam o acaso. - Conhecer o significado de experiência determinista e experiência aleatória. - Identificar e determinar todos os resultados possíveis quando se realiza uma determinada experiência aleatória. - Identificar e classificar acontecimentos de uma experiência aleatória.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Tarefa introdutória Manual *Matemática 9* Quadro Material necessário para a demonstração da tarefa (Saco com bolas numeradas de 1 a 6) Apresentação *PowerPoint*	Tarefa introdutória Material de escrita Caderno

Modo de Trabalho
- Pequenos grupos - Grupo turma

Desenvolvimento da aula

1. **Início da aula. Sumário. (10 min)**
2. **Introdução ao tema das Probabilidades (5 min)**

A professora fará uma pequena introdução onde questionará os alunos sobre a utilização do termo "probabilidade" no dia-a-dia e apresentará alguns exemplos, em *PowerPoint*.

3. **Tarefa**

3.1. Introdução da tarefa (parte I) (5 min)

A aula terá início com a proposta da tarefa introdutória. A professora distribuirá a tarefa.

De seguida será indicado aos alunos que a realização da tarefa será a pares (pré-estabelecidos pela professora), que terão cerca de 10 min para a resolução desta primeira parte, e que, posteriormente haverá uma discussão coletiva.

A professora deverá ainda avisar os alunos que recolherá as resoluções no final da aula e que a correção terá de ser feita a caneta, não devendo apagar nada do que fizeram.

3.2. Trabalho autónomo a pares (10 min)

Durante a realização da tarefa, a professora circulará pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que surjam.

Atividade do aluno	Atividade da professora
1. **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não conseguir classificar as experiências entre as duas categorias disponíveis.	A professora deverá esclarecer os alunos que devem classificar cada uma das situações numa das categorias disponíveis. Poderá ainda reforçar que a ideia é classificar os acontecimentos quanto à total exatidão do resultado da experiência.
2. **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não compreender o que é solicitado na questão.	A professora poderá dar um exemplo concreto para ajudar os alunos a compreender a questão. "Caso a experiência abrir a janela e verificar se está a chover ou não, os resultados possíveis seriam {chove, não chove}".

4. **Discussão e síntese (15 min)**

A discussão terá como suporte uma apresentação *PowerPoint* preparada pela professora. Através do questionamento a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à participação dos diversos grupos. À medida que vai discutindo com os alunos a resolução da tarefa, vai introduzindo os novos conceitos para posteriormente se fazer uma síntese.

5. Introdução da tarefa (parte II) (5 min)

A professora informa que os alunos terão cerca de 15 minutos para a realização desta parte da tarefa.

5.1. Trabalho autónomo a pares (15 min)

Durante a realização da tarefa, a professora circulará pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que surjam.

Atividade do aluno	Atividade da professora
1. Possível dificuldade: Os alunos poderão não conseguir identificar o universo de resultados.	Durante o momento de trabalho autónomo é importante que a professora analise as justificações dos alunos para posteriormente no momento de discussão motivar a participação dos grupos que considere pertinentes.
2. Possível dificuldade: Os alunos poderão não conseguir compreender a situação descrita. **3. Possível dificuldade:** Os alunos poderão não justificar.	A professora deverá questionar os alunos, caso tirassem uma bola do saco, se seria mais provável obter algum número ou não.
4. Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não compreender a questão que é colocada. **(2)** Os alunos poderão não conseguir quantificar o quão provável é ocorrer a situação descrita.	A professora deverá ainda salientar a necessidade e a importância de os alunos justificarem as suas opiniões. A professora poderá questionar se a situação é muito provável, pouco, se nunca acontece ou se acontece sempre.
5. Possível dificuldade: Os alunos poderão não compreender a questão que é colocada.	
6. Possível dificuldade: Os alunos poderão não conseguir identificar as bolas que correspondem ao que é solicitado.	

6. Discussão e síntese (20 min)

A discussão terá como suporte uma apresentação *PowerPoint* preparada pela professora. Através do questionamento a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à participação dos diversos grupos. À medida que vai discutindo com os alunos a resolução da tarefa, vai introduzindo os novos conceitos para posteriormente se fazer uma síntese.

7. Esclarecimento de dúvidas e encerramento da aula (5 min)

Através do questionamento, a professora deverá verificar se os alunos compreenderam os tópicos abordados na aula.

Avaliação

Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Esta aula contemplará também avaliação formativa, através da recolha das resoluções dos alunos à tarefa.

Anexo 2.2. – Plano da aula 2

Turma: 9ºB	**Tempo:** 90 min	**Data:** 1 de março
Sumário: Acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares. Resolução de exercícios. Acontecimentos equiprováveis.		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares. Equiprobabilidade.

Objetivos
- Identificar acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares. - Identificar acontecimentos equiprováveis.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Tarefa “Estará equilibrada?” Manual *Matemática 9* *PowerPoint* Computador Projetor	Tarefa “Estará equilibrada?” Manual *Matemática 9* Moeda (a professora deverá alertar na aula anterior para a necessidade deste material)

Modo de Trabalho
- Pequenos grupos - Pares - Grupo turma

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula. Sumário. (10 min)

2. Introdução dos conceitos: acontecimentos disjuntos e acontecimentos complementares (20 min)

A aula terá início com a introdução dos dois novos conceitos por parte da professora, recorrendo à apresentação *PowerPoint* para os ilustrar aos alunos.

Ao longo da exposição, a professora deverá interagir com os alunos, questionando-os, para perceber se estes estão a acompanhar o que está a ser abordado.

A professora, no final da exposição deverá entregar a cópia dos slides do *PowerPoint* para que os alunos fiquem com um registo que possam consultar a qualquer momento.

3. Trabalho autónomo em pequenos grupos (15 min)

Durante a realização da tarefa, a professora circula pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que surjam.

A professora deverá alertar para o significado de definir um conjunto em extensão (é uma enumeração dos elementos que pertencem a esse mesmo conjunto).

Atividade do aluno	Atividade da professora
Exercício nº 2 **2.1. Possível resolução:** $\mathbf{S = \{L, V, A, R\}}$	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não se recordar do conceito de espaço de resultados.	A professora deverá pedir aos alunos para se recordarem do que foi abordado na aula anterior.
2.2. Possíveis resoluções: **(1)** $\mathbf{A = \{L, V\}}$ **e** $\mathbf{B = \{A, R\}}$ **(2)** $\mathbf{C = \{L, V, A\}}$ **e** $\mathbf{D = \{R\}}$ **(3)** $\mathbf{E = \{L\}}$ **e** $\mathbf{F = \{V, A, R\}}$ (Entre outras possíveis)	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não conseguir registar corretamente os acontecimentos. **(2)** Os alunos poderão confundir o conceito de acontecimentos complementares e incompatíveis.	A professora deverá solicitar aos alunos para recordarem o significado de acontecimentos incompatíveis e o significado de acontecimentos complementares, podendo fazê-lo através da cópia dos slides que a professora entregou.
Exercício 3 **3.1. Possível resolução:** $\mathbf{S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}}$	

3.2. Possível resolução: **a)** $\mathbf{A = \{2,4,6\}}$ **b)** $\mathbf{B = \{1,3,5,7\}}$ **c)** $\mathbf{C = \{2,3,5,7\}}$ **d)** $\mathbf{D = \{1,2,3,6\}}$ **e)** $\mathbf{E = \{2,4,6\}}$ **f)** $\mathbf{F = \{1,4\}}$ **g)** $\mathbf{G = \{1\}}$ **h)** $\mathbf{H = \{\ \}}$ **i)** $\mathbf{I = \{1,2,3,4,5,6,7\}}$ **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não se recordar de alguns conceitos das alíneas, nomeadamente "quadrado perfeito" e "cubo perfeito".	A professora deverá questionar se existe algum colega que se recorde dos conceitos. Caso não aconteça, a professora deverá fazê-lo.
3.3. Possível resolução: Acontecimento elementar: G Acontecimento impossível: H Acontecimento certo: I Acontecimentos compostos: A,B,C,D,E,F e I **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades na classificação dos acontecimentos. **(2)** Os alunos poderão considerar que um acontecimento apenas poderá pertencer a uma das categorias.	A professora deverá relembrar o que foi abordado na aula anterior. A professora deverá alertar os alunos que um acontecimento pode pertencer a mais do que uma categoria, uma vez que poderá ser certo e composto, por exemplo.
3.4. Possível resolução: **a)** C e F **b)** A e B **c)** A e F (Poderão existir outros)	

4. Correção dos exercícios (15 min)

A professora deverá solicitar a alguns alunos para resolverem os exercícios no quadro de modo a mostrarem aos colegas o que fizeram.

5. Exploração da parte I da tarefa “Estará equilibrada?” (30 min)

5.1. Introdução da tarefa

A professora distribui a tarefa e alertará que a realização da mesma será a pares e repartida em duas partes, sendo que primeiramente será uma exploração com recurso a uma moeda e que a segunda parte será explorada na aula seguinte. É importante que a professora alerte os alunos para que tenham cuidado com o barulho, de modo a não perturbarem o trabalho dos colegas. A professora deverá alertar que na aula seguinte se fará a discussão de ambas as partes da tarefa.

5.2. Trabalho autónomo dos alunos

Atividade do aluno	Atividade da professora
1. Possível resolução: (Opinião pessoal dos alunos) **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão não conseguir expor a sua opinião. **(2)** Os alunos poderão não conseguir justificar a sua opinião.	Durante o momento de trabalho autónomo é importante que a professora analise as resoluções dos alunos para posteriormente no momento de discussão selecionar as opiniões que considere pertinentes e que contribuam para a discussão. A professora deverá alertar para a necessidade de justificação das suas respostas, não havendo respostas certas ou erradas.
2. Possível resolução: (De acordo com a simulação de cada par) **2.1.Possíveis resoluções:** **(1)** Os alunos confirmam que mantêm a opinião, justificando. **(2)** Os alunos têm uma opinião diferente, após a simulação. **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão, a partir da simulação realizada, não conseguir justificar a sua opinião. **(2)** Os alunos poderão afirmar que mantêm ou não a sua opinião, não sabendo justificar. **2.2.Possível resolução:** (De acordo com a simulação de cada par)	A professora deverá questionar os alunos se continuam a manter a opinião que tiveram na questão anterior, relativamente há existência de uma face com maior probabilidade de ficar voltada para cima.

Possíveis dificuldades: Os alunos poderão não se recordar como calcular a frequência relativa.	A professora deverá recordar o que foi trabalhado no momento de lecionação dos histogramas pelo professor cooperante.
2.3.Possível resolução: (Opinião pessoal de cada par)	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não compreender o significado de moeda perfeita.	A professora deverá esclarecer que uma moeda é perfeita quando não tem tendência para uma das faces.

Avaliação
Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

2. A roda da sorte

Na figura 6 está representada uma roda da sorte.
A experiência aleatória consiste em rodar o ponteiro e anotar a cor que sai.
A coroa circular está dividida em quatro partes iguais, de cores: laranja (L), verde (V), amarela (A) e cor-de-rosa (R).

Figura 6

2.1. Identifica o espaço amostral, S.

2.2. Indica dois pares de acontecimentos complementares.

3. Espaço de resultados

Uma caixa tem sete bolas numeradas de 1 a 7, como se mostra na figura 7.
Realiza-se uma experiência aleatória que consiste em extrair uma bola da caixa e registar o número que tem inscrito.

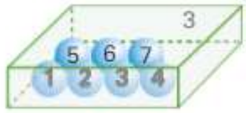


Figura 7

3.1. Qual é o espaço amostral, S?

3.2. Define em extensão os acontecimentos seguintes, associados à experiência aleatória descrita.

a) A: sair número par;
b) B: sair número ímpar;
c) C: sair número primo;
d) D: sair divisor de 6;
e) E: sair múltiplo de 2;
f) F: sair quadrado perfeito;
g) G: sair cubo perfeito;
h) H: sair número negativo;
i) I: sair número inferior a 10.

3.3. Classifica os acontecimentos anteriores utilizando uma das seguintes expressões:

- Acontecimento elementar
- Acontecimento impossível
- Acontecimento certo
- Acontecimento composto

3.4. Relativamente aos acontecimentos em **3.2.**, indica um par de acontecimentos que sejam:

a) incompatíveis mas não complementares;
b) complementares;
c) compatíveis.

Anexo 2.3. – Plano da aula 3

Turma: 9ºB	**Tempo:** 45 min	**Data:** 5 de março
Sumário: Acontecimentos equiprováveis. Frequências relativas e probabilidades. Resolução da tarefa "Estará equilibrada?".		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Equiprobabilidade. Conceito frequencista.

Objetivos
- Identificar acontecimentos equiprováveis. - Reconhecer situações onde é necessário recorrer à realização de experiências para estimar a probabilidade de um acontecimento.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Tarefa "Estará equilibrada?" *PowerPoint* Computador Projetor *Geogebra*	Tarefa "Estará equilibrada?" *Geogebra*

Modo de Trabalho
- Pares - Grupo turma

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula. Sumário. (10 min)

2. Tarefa "Estará equilibrada?"

2.1. Introdução da tarefa (5 min)

A aula terá início com a proposta da tarefa "Estará equilibrada?" parte II.

A professora distribui novamente as tarefas (recolhidas na aula anterior) e explica aos alunos que recorrerão ao *Geogebra* para realização desta parte da tarefa.

De seguida será explicado aos alunos que a realização da tarefa será com os mesmos pares (pré-estabelecidos pela professora) da aula anterior e que, posteriormente, será feita a discussão em grupo-turma.

2.2. Trabalho autónomo a pares (Parte II) (15 min)

Durante a realização da tarefa, a professora circula pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que surjam.

Atividade do aluno	Atividade da professora
Questões 1, 2 e 3: **Possível resolução:** (Resposta pessoal de cada par, de acordo com a simulação realizada) A frequência relativa referente às duas faces é idêntica, aproximando-se de 0,5 cada uma.	Durante o momento de trabalho autónomo é importante que a professora analise as resoluções dos alunos para posteriormente no momento de discussão selecionar as opiniões que considere pertinentes e que contribuam para a discussão. A professora deverá alertar para a necessidade de compararem as frequências relativas.
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não retirar qualquer conclusão, analisando as frequências relativas. **(2)** Os alunos poderão não compreender que tipo de conclusão é possível retirar a partir da análise da simulação efetuada.	A professora deverá questionar o que podem observar relativamente às frequências relativas de cada face, nomeadamente se são diferentes, iguais ou parecidas (por exemplo).
Questão 4: **Possível resolução:** Com o número de lançamentos efetuado não é possível concluir se a moeda está viciada, pelo que a afirmação do capitão é precipitada.	

Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não conseguir comentar a afirmação do capitão. **(2)** Os alunos poderão não conseguir concluir que é necessário um grande número de lançamentos para conseguir concluir se a moeda está viciada.	A professora deverá questionar se o capitão poderia afirmar que a moeda é viciada, visto que apenas realizou 10 lançamentos.

3. Discussão e síntese (15 min)

A professora discutirá com os alunos a resolução da tarefa, para que posteriormente se possa fazer uma síntese. Nesta discussão a professora suportar-se-á de uma apresentação *PowerPoint* onde apresentará os resultados que irá recolher dos grupos, relativamente à parte I (aula de dia 1 de março).

Através do questionamento a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades.

A professora deverá garantir que os alunos compreendem que, caso a moeda seja equilibrada, é tão provável "sair face europeia" como "sair face nacional".

A professora deverá dar ênfase que não é possível tirar conclusões acerca do equilíbrio de uma moeda quando se realizam apenas dez lançamentos.

Para isso, a professora deverá utilizar os resultados obtidos pelos diferentes grupos para sustentar esta ideia, recorrendo a uma tabela:

Grupo	Nº de experiências	Número de ocorrências da face	
		Europeia	Nacional

A professora deverá alertar posteriormente que nestes casos, o valor que se obtém não é o valor exato da probabilidade, mas uma aproximação que, será tanto melhor quanto maior for o número de experiências realizadas, tal como afirma a Lei dos Grandes números. De seguida a professora fará uma **síntese:**

Os acontecimentos são equiprováveis quando cada um dos casos possíveis ocorre com aproximadamente a mesma probabilidade.

Lei dos grandes números: quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se adota como probabilidade desse acontecimento.

4. Encerramento da aula

Avaliação

Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Anexo 2.4. – Plano da aula 4

Turma: 9ºB	**Tempo:** 45 min	**Data: 6** de março
Sumário: Conceito frequencista de probabilidade: resolução de exercícios do manual.		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Conceito frequencista.

Objetivos
- Consolidar de conhecimentos: calcular a probabilidade de um acontecimento recorrendo ao conceito frequencista.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Manual *Matemática 9*	Manual *Matemática 9* Material de escrita Caderno

Modo de Trabalho
- Pequenos grupos - Grupo turma

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula. Sumário. (10 min)

2. Introdução ao momento de trabalho autónomo

A professora dará início à aula com a proposta dos exercícios 2 (página 176); 12 (página 182); 5 (página 191) e 2 (página 192). De seguida será explicado aos alunos que a realização destes exercícios será em pequenos grupos (pré-estabelecidos pela professora) e que, posteriormente, haverá a discussão/correção no quadro.

3. Trabalho autónomo em pequenos grupos (20 min)

Durante a realização da tarefa, a professora circula pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que surjam.

Atividade do aluno	Atividade da professora
Exercício nº 2 (página176) **2.1.Possível resolução:** $\mathbf{N^{\underline{o}}\ de\ experiências = 20 \times 10 = 200}$	Durante o momento de trabalho autónomo é importante que a professora analise as resoluções dos alunos para posteriormente no

$$N^{o}fósforos\ na\ linha = 56$$ A frequência relativa do número de fósforos que ficam sobre a linha: $$\frac{56}{200} = 0,28 = 28\%$$	momento de discussão selecionar as resoluções que considere pertinentes e que contribuam para a discussão.
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldade em compreender o enunciado. **(2)** Os alunos poderão não conseguir estimar a probabilidade através da frequência relativa.	A professora deverá esclarecer o enunciado. “A experiência consiste em lançar 20 fósforos e verificar os que ficam sobre uma das linhas. Fazemos essa experiência 10 vezes. No quadro estão representados quantos fósforos caíram sobre as linhas, em cada um desses 10 lançamentos. Por exemplo, o que representa o nº 7 no quadro?”
2.2.Possível resolução: $$20 \times 50 = 1000$$ No total, lançaram-se 1000 fósforos, estima-se que 28% dos quais caiam sobre uma das linhas. Logo, $$1000 \times 28\% = 280\ fósforos$$	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não compreender que deverão usar a frequência relativa que calcularam na alínea anterior para resolver esta alínea.	A professora deverá, por exemplo, questionar os alunos: “O que fizeste na alínea anterior pode ser-te útil?
Exercício 12 (página 182) **12.** **12.1. Possível resolução:** Não, pois o número de lançamentos efetuados é reduzido para se tirar uma conclusão.	
12.2. Possível resolução: Podemos concluir que o dado é imperfeito (é viciado), dado que as frequências relativas das faces do dado não são idênticas; a frequência relativa para a face 6 é muito superior às restantes.	A professora deverá alertar para tomarem atenção à tabela, nomeadamente a todos os valores que estão representados.
Possível dificuldade: Os alunos poderão não reparar que as faces não têm, aproximadamente, a mesma frequência relativa.	

12.3. Possível resolução: A melhor aposta seria o número 6, dado que a probabilidade de sair esta face é muito superior à dos restantes números. **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não conseguir justificar a sua aposta.	A professora deverá salientar a importância de os alunos justificarem a sua opinião.
Exercício 5 (página 191) **Possível resolução:** $\mathbf{P(azul) = 0,4}$ $\mathbf{P(vermelha) = \frac{1}{3}}$ $\mathbf{P(verde) = 0,10}$ $\mathbf{P(amarela) = 1 - 0,4 - \frac{1}{3} - 0,10 = \frac{1}{6}}$ **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão não colocar as frequências relativas na mesma unidade. **(2)** Os alunos poderão não se recordar que a soma das frequências relativas das cores das bolas é 1 unidade.	A professora deverá alertar que as frequências relativas não estão na mesma unidade (a frequência relativa da cor verde corresponde a 0,10). A professora deverá questionar qual o valor da soma das frequências relativas das cores das bolas .
Exercício 2 (página 192) **2.1.** **a) Possível resolução:** $\mathbf{\frac{39}{420} \approx 0,09}$ **b) Possível resolução:** $\mathbf{\frac{184}{420} \approx 0,44}$ **c) Possível resolução:** $\mathbf{\frac{141}{420} \approx 0,34}$ **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão não identificar os casos favoráveis a cada acontecimento.	A professora deverá alertar os alunos “Quais são as faces do dado que contêm números primos?”, “Quais são os números maiores que 4?”. A professora deverá alertar para o cuidado que devem ter ao aproximar o resultado final, pois no enunciado é pedido para apresentar o resultado com aproximação às centésimas.

(2) Os alunos poderão ter dificuldades nos arredondamentos. **2.2. Possíveis resoluções:** **(1)** $\frac{100\%}{6} \approx 16,7\%$ **(2)** $\frac{1}{6}$ **Possíveis dificuldades:** (1) Os alunos poderão não se recordar que, se o dado é perfeito, então todas as faces têm a mesma probabilidade de sair. (2) Os alunos poderão não conseguir encontrar a probabilidade pedida.	A professora poderá pedir aos alunos para se recordarem do que foi abordado nas aulas anteriores.

4. Discussão e esclarecimento de dúvidas (15 min)

A professora discutirá com os alunos a resolução da tarefa, para isso solicitará alguns alunos para resolverem os exercícios no quadro. Através do questionamento a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades.

Avaliação

Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos ao longo do momento de trabalho autónomo, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Exercícios do manual

2. Experiência com fósforos

A Eduarda fez uma experiência com fósforos.

Lançou aleatoriamente 20 fósforos de uma caixa sobre uma folha de papel com linhas paralelas.

A Eduarda fez a experiência 10 vezes e registou, para cada experiência, o número de fósforos, dos 20 lançados, que ao caírem ficaram sobre uma das linhas:

7	5	6	8	4	6	7	4	4	5

2.1. Utiliza a informação dada para estimar a probabilidade de, ao lançar ao acaso um só fósforo, ele ficar sobre uma linha.

2.2. A Eduarda continuou a experiência lançando os 20 fósforos 50 vezes.
Quantos fósforos, no total, se estima que tivessem ficado sobre uma linha?

12 Será o dado perfeito?

Com um dado com as faces numeradas de 1 a 6 fez-se a seguinte experiência:

- Lançámos o dado 10 vezes e construímos a tabela seguinte.

Número da face	1	2	3	4	5	6
n_i	3	2	1	2	0	2
f_i	0,3	0,2	0,1	0,2	0	0,2

- Lançámos o dado 2000 vezes e construímos a tabela seguinte:

Número da face	1	2	3	4	5	6
n_i	280	300	300	280	240	600
f_i	0,14	0,15	0,15	0,14	0,12	0,30

12.1. Com 10 lançamentos podíamos afirmar que o dado era viciado? Justifica.

12.2. Depois de efetuarmos 2000 lançamentos, que conclusão podemos tirar acerca do dado?

12.3. Se jogasses com este dado, qual era o número em que apostarias? Justifica.

5. Comparar probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias nas quais se presume equiprobabilidade dos casos possíveis

Um saco contém bolas azuis, vermelhas, verdes e amarelas, indistinguíveis ao tato.
Na tabela ao lado estão indicadas as frequências relativas das cores das bolas.
Considera a experiência de retirar, ao acaso, uma bola do saco.
Qual é a probabilidade de retirar uma bola amarela?

Cor	f_i
Azul	0,4
Vermelha	$\frac{1}{3}$
Verde	10%
Amarela	

2. Numa experiência com um dado cúbico viciado, com as faces numeradas de 1 a 6, obtiveram-se os seguintes resultados em 420 lançamentos:

N.º da face voltada para cima	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	39	67	62	111	55	86

2.1. No lançamento deste dado, estima a probabilidade de se obter:

a) 1 **b)** um número primo; **c)** um número maior que 4.

Apresenta os resultados com aproximação às centésimas.

2.2. Se o dado fosse perfeito, qual seria a probabilidade de se obter 1?

Anexo 2.5. – Plano da aula 5

Turma: 9ºB	**Tempo:** 90 min	**Data:** 8 de março
Sumário: Resolução de exercícios do livro do IAVE.		

Tema	Tópico
Probabilidades	Regra de Laplace.

Objetivos
- Consolidação de conhecimentos: regra de Laplace.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Livro do IAVE	Livro do IAVE Caderno Material de escrita

Modo de Trabalho
- Pequenos grupos - Grupo turma

Desenvolvimento da aula
1. Início da aula. Sumário. (10 min) **2. Tarefa "Batalha naval das probabilidades"** **2.1. Introdução da tarefa (5 min)** A aula terá início com a proposta da parte II da tarefa "Batalha naval das probabilidades". A professora poderá mostrar aos alunos o jogo da batalha naval, para esclarecer possíveis dúvidas aos alunos que não conhecem o mesmo. De seguida será explicado aos alunos que a realização da tarefa será em pequenos grupos (pré-estabelecidos pela professora) e que, posteriormente, haverá a discussão no quadro. A professora deverá ainda avisar os alunos que recolherá as resoluções e que, a correção terá de ser feita no caderno. **2.2. Trabalho autónomo em pequenos grupos (15 min)** Durante a realização da tarefa, a professora circula pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que surjam.

Atividade do aluno	Atividade da professora
3. Possível resolução: **100** possibilidades **Possível dificuldade:** Os alunos poderão ter dificuldade em compreender o que é solicitado.	Durante o momento de trabalho autónomo é importante que a professora analise as resoluções dos alunos para posteriormente no momento de discussão selecionar as resoluções que considere pertinentes e que contribuam para a discussão.
4. Possível resolução: Porta-aviões, porque é o barco que ocupa mais espaço (tem o maior nº de quadradinhos). **Possível dificuldade:** Os alunos poderão ter dificuldade em encontrar qual o barco em que é mais provável acertar, pensando que a forma poderá interferir na probabilidade de acertar no barco.	A professora deverá questionar, caso o aluno estivesse a jogar com um colega, qual o barco que seria mais provável acertar com um tiro: o tamanho do barco interferirá nessa probabilidade?
5. Possível resolução: Igualmente provável, uma vez que ocupam o mesmo espaço (3 quadrados). **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não conseguir interpretar que a fragata ocupa 3 espaços e que o submarino e lancha de ataque, juntos também ocupam o mesmo espaço.	A professora deverá questionar que espaço é ocupado pela fragata e de seguida, que espaço é ocupado pelo submarino e lancha de ataque.
6. Possível resolução: Na água, porque existem apenas 15 quadrados ocupados com barcos em 100 quadrados totais, existindo, portanto, mais quadrados com água. **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão não conseguir justificar a sua resolução.	A professora, mais uma vez, deverá recorrer ao questionamento, para ajudar os alunos a superar as suas dificuldades. Por exemplo: “Quantos quadradinhos tens ocupados com água? E com os

(2) Os alunos poderão não conseguir encontrar o que será mais provável acontecer.	barcos?", "Existem mais quadrados ocupados com água ou com barcos?".
7. Possível resolução: Porta-aviões: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ Couraçado: $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ Fragata: $\frac{3}{100}$ Submarino: $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ Lancha de ataque: $\frac{1}{100}$	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não compreender o que é solicitado, nomeadamente o conceito de fração. **(2)** Os alunos poderão não encontrar as frações solicitadas. **(3)** Os alunos poderão ter dificuldades em simplificar a fração.	A professora deverá esclarecer que está a ser pedido a parte do mar que está ocupada por cada barco.
8. Possível resolução: Será o quociente entre o espaço ocupado pelo porta-aviões e a totalidade do mar, neste caso $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não encontrar nenhuma forma de calcular a probabilidade do acontecimento.	A professora deverá recorrer ao questionamento para ajudar os alunos a superar as suas dificuldades. Por exemplo: "Que fração do tabuleiro está ocupada pelo porta-aviões?"

2.3. Discussão e síntese (25 min)

A professora discutirá com os alunos a resolução da tarefa, para que posteriormente se possa fazer uma síntese, para isso recorrerá a uma apresentação *PowerPoint*.
Através do questionamento a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades.
Posteriormente, a professora fará uma sistematização:

Lei de Laplace: Numa experiência aleatória onde os casos possíveis sejam em número finito e equiprováveis, a probabilidade de um determinado acontecimento A é dada por:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\boldsymbol{número\ de\ casos\ favoráveis\ à\ realização\ de\ A}}{\boldsymbol{número\ total\ de\ casos\ possíveis}}$$

Posteriormente, a professora deverá questionar os alunos quais os valores para a probabilidade dos acontecimentos possíveis, impossíveis e certos.

A probabilidade de um acontecimento **impossível** é zero.
A probabilidade de um acontecimento **certo** é um.
A probabilidade de um acontecimento **possível** é diferente de zero.

3. Trabalho autónomo: Resolução do exercício 6 e 7 do manual (Anexo) (15 min)

Atividade do aluno	Atividade da professora
Questão nº6: **6.1. Possível resolução:** Seja A: dar um lápis de cor amarela ao Gaspar. $\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{28}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$ **Possível dificuldade:** Os alunos poderão ter dificuldade em encontrar os casos possíveis.	A professora deverá questionar quantos lápis existem, no total, dentro da caixa.
6.2. a) Possível resolução: Seja B: dar um lápis de cor azul à Patrícia. $\mathbf{P(B)} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}$ **b) Possível resolução:** $\mathbf{P(B)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{27}}$ **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não se recordar que agora teremos menos um lápis do que na situação inicial.	A professora deverá recordar que já foi oferecido um lápis ao Gaspar.
Questão nº7 **7.1. Possível resolução:** **a)** E	

b) D **c)** A, B ou C **d)** A e C	
Possível dificuldade: Os alunos poderão ter dificuldades em interpretar o valor das probabilidades que são dadas, de modo a classificar os acontecimentos.	A professora poderá sugerir aos alunos que comecem por classificar os acontecimentos, sabendo as suas probabilidades e depois tentem responder à questão colocada.
7.2. Possível resolução: Acontecimento C	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não reparar que a probabilidade de A e de C é igual e, portanto, podemos comparar a probabilidade entre os acontecimentos A e B.	A professora deverá questionar qual a característica dos acontecimentos equiprováveis.

4. Correção dos exercícios e esclarecimento de dúvidas (10 min)

A correção do exercício será realizada no quadro. A professora deverá solicitar a um aluno que resolva o exercício no quadro, para mostrar aos colegas a sua resolução. A professora deverá, através do questionamento, verificar se os alunos ficaram totalmente esclarecidos.

Avaliação

Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Exercícios do manual

Questão 6

Numa caixa colocaram-se 20 lápis amarelos e 8 azuis.

6.1. Ao acaso, tirámos, sem olhar, um lápis da caixa e oferecemo-lo ao Gaspar.

Qual é a probabilidade de o lápis dado ser amarelo?

6.2. Tirou-se mais um lápis da caixa para oferecer à Patrícia.

Determina a probabilidade de o lápis oferecido à Patrícia ser azul sabendo que o lápis dado ao Gaspar era:

a) amarelo;

b) azul.

Questão 7

Relativamente às probabilidades dos acontecimentos A, B, C, D e E de uma experiência aleatória, sabe-se que:

- $P(A) > P(B)$
- $P(A) = P(C)$
- $P(D) = 0$
- $P(E) = 1$

Indica:

7.1. **a)** um acontecimento certo;

b) um acontecimento impossível;

c) um acontecimento possível;

d) dois acontecimentos equiprováveis.

7.2. Qual dos acontecimentos, C ou B, é o mais provável?

Anexo 2.6. – Plano da aula 6

Turma: 9ºB	**Tempo:** 90 min	**Data: 8** de março
Sumário: Resolução de exercícios do livro do IAVE.		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Regra de Laplace.

Objetivos
- Consolidação de conhecimentos: regra de Laplace.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Livro do IAVE	Livro do IAVE Caderno Material de escrita

Modo de Trabalho
- Pequenos grupos - Grupo turma

Desenvolvimento da aula
1. Início da aula. Sumário. (10 min) **2. Revisão (10 min)** A aula terá início com uma pequena revisão dos conteúdos abordados na aula anterior. A professora deverá solicitar aos alunos que acrescentem pequenas notas aos diapositivos referentes à aula anterior. Posteriormente, a professora fará em conjunto o exercício nº 1 da página 163 do manual para verificar se os alunos compreenderam como se apresenta a probabilidade de um acontecimento. **3. Trabalho autónomo em pequenos grupos** **3.1. Introdução** A aula terá início com proposta de resolução de exercícios do livro do IAVE (Questões de Provas Finais Nacionais e de Testes Intermédios 2008-2016). Exercícios a resolver: Exercício 2. (pág. 202); Exercício 4. (pág. 202); Exercício 6. (pág. 204); Exercício 8. (pág. 205); Exercício 22. (pág. 212); Exercício 37. (pág. 219)

De seguida será explicado aos alunos que a realização dos exercícios será em pequenos grupos (pré-estabelecidos pela professora) e que, posteriormente, haverá a discussão no quadro.
A professora deverá informar que terão de resolver os exercícios numa folha à parte para entregarem no final da aula, a qual será devolvida ainda durante o mesmo dia, para que possam usar as mesmas para estudar.

3.2. Trabalho autónomo em pequenos grupos (50 min)

Durante a realização da tarefa, a professora circula pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que surjam.

Atividade do aluno	Atividade da professora
Exercício 2. (pág. 202) **Possível resolução:** $\frac{1}{31}$ **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão ter dificuldade em identificar os casos possíveis e casos favoráveis. **(2)** Os alunos poderão não se recordar de quantos dias tem o mês de março.	Durante o momento de trabalho autónomo é importante que a professora analise as resoluções dos alunos para posteriormente no momento de discussão selecionar as resoluções que considere pertinentes e que contribuam para a discussão. A professora deverá através do questionamento ajudar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades. Por exemplo: "Quantos dias tem o mês de março?", "Em que dias é que o Pedro pode fazer anos?".
Exercício 4. (pág. 202) **Resolução:** (B) **Possível dificuldade:** Os alunos poderão ter dificuldade em identificar o número de bilhetes que o João comprou (casos possíveis) e o número de bilhetes com um número par (casos favoráveis).	A professora deverá questionar "Quantos bilhetes o João comprou?", "Quantos bilhetes, dos que o João comprou, têm um número par?".
Exercício 6. (pág. 204) **a) Resolução:** (B) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não verificar que no saco estão presentes mais do que uma peça de cada uma das	A professora deverá questionar "Quantas peças estão no saco?", "Quantas vogais há no saco?".

cinco vogais tendo, portanto, dificuldades em encontrar o número de casos favoráveis. **b) Possível resolução:** $$\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$	
Possíveis dificuldades: **(3)** Os alunos poderão não verificar que o Martim, depois de tirar quatro letras restaram no saco 24. **(4)** Os alunos poderão não verificar que ao formar a palavra GATO, o Martim já tinha tirado uma peça com a letra T, restando apenas 2 peças com a letra T no saco. **Exercício 8. (pág. 205)** **a) Resolução:** A turma tem 30 alunos. $\mathbf{30\%}$ **de 30 alunos** corresponde a $\mathbf{30\% \times 30 = 9}$ alunos. Pelo que a afirmação "30% dos alunos doaram sangue duas vezes" está correta.	A professora deverá questionar "Depois de tirar as quatro peças, quantas peças ficaram no saco?", "Quantas peças com a letra T existem?".
Possíveis dificuldades: **(4)** Os alunos poderão não compreender o gráfico representado. **(5)** Os alunos poderão não conseguir retirar dados importantes do gráfico. **(6)** Os alunos poderão ter dificuldades no cálculo da percentagem de alunos solicitada. **b) Possível resolução:** 10 raparigas doaram sangue menos de duas vezes (doaram 1 vez ou nunca doaram sangue). $$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$	A professora deverá ajudar os alunos a compreender o gráfico, questionando "Quantos alunos tem a turma?", "Quantos alunos correspondem a 30% da turma?".

Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não compreender que as raparigas que doaram sangue menos de duas vezes corresponde a dar sangue uma vez ou nenhuma. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades a encontrar o número de casos possíveis, confundindo com o número total de raparigas.	A professora deverá questionar os alunos para os ajudar a ultrapassar as suas dificuldades, “Doar sangue menos de duas vezes corresponde a doar sangue quantas vezes?”, “Quantos alunos tem a turma?”.
Exercício 22. (pág. 212) **Resolução:** (B) Como o número total de rifas é 250, a probabilidade da Alice ganhar o prémio é $\frac{n}{250}$, logo: $\frac{n}{250} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 25n = 250 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 10$ **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão não associar o número de casos possíveis ao problema. **(2)** Os alunos poderão não encontrar uma relação entre as duas frações.	A professora deverá questionar os alunos “Quantas rifas foram vendidas?”, “Como se calcula a probabilidade da Rita ganhar o prémio?”.
Exercício 37. (pág. 219) **Possíveis resoluções:** **(1)** (C) Se a probabilidade de ser rapaz é $\frac{2}{3}$, então a probabilidade de ser rapariga é $\frac{1}{3}$. Portanto, o número de rapazes é o dobro do número de raparigas. Como há 6 raparigas, o número de rapazes é 12. **(2)** (C) Se a probabilidade de ser rapaz é $\frac{2}{3}$, então a probabilidade de ser	

rapariga é $\frac{1}{3}$. Portanto, como há 6 raparigas, o número total de alunos da turma é igual a $\mathbf{6 \times 3 = 18}$. Portanto, o número de rapazes é igual a $\frac{2}{3} \times \mathbf{18 = 12}$. **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão não encontrar a probabilidade de ser rapariga. **(2)** Os alunos poerão não conseguir encontrar o número total de alunos da turma. **(3)** Os alunos poderão não conseguir encontrar a relação entre o número de rapazes e o número de raparigas.	A professora deverá questionar "Se a probabilidade de ser rapaz é $\frac{2}{3}$, qual será a probabilidade de ser rapariga?", "Quantas raparigas há na turma?", "Quantos alunos tem a turma?".

A professora deverá sugerir mais alguns exercícios para os alunos com um ritmo de trabalho mais acelerado: 5, 15, 19, 24, 28, 29, 34, 35, 36, 40, 44, 48, 49, 52 e 56 do livro do IAVE.

4. Discussão e esclarecimento de dúvidas (20 min)

A professora discutirá com os alunos a resolução dos exercícios, para que todos ultrapassem as suas dificuldades. Para isso, solicitará a alguns alunos que resolvam os exercícios no quadro, de modo a poderem mostrar aos colegas a sua resolução. A professora deverá alertar que, caso seja necessário corrigirem os exercícios, terão de o fazer a caneta.

Avaliação

Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Exercícios do IAVE

2. O Pedro e a Maria fazem anos no mês de Março.

Sabendo que a Maria faz anos no primeiro dia do mês, qual é a probabilidade de o Pedro fazer anos no mesmo dia?

Apresenta o resultado na forma de fracção.

Não justifiques a tua resposta.

4. O João foi ao cinema com os amigos.

Comprou os bilhetes com os números $5, 6, 7, 8, ..., 17$, da fila *S*, isto é, todos os números entre 5 e 17, inclusive.

O João tirou, aleatoriamente, um bilhete para ele, antes de distribuir os restantes pelos amigos.

Qual é a probabilidade de o João ter tirado para ele um bilhete com um número par?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{6}{13}$ ☐ $\frac{7}{13}$ ☐ $\frac{13}{7}$

6. O *Scrabble* é um jogo em que os jogadores têm de retirar, ao acaso, peças de dentro de um saco.

Em cada peça está inscrita uma letra.

Os jogadores usam essas letras para tentar construir palavras.

Num determinado momento de um jogo de *Scrabble* entre o Martim e a Leonor estavam, dentro do saco, 28 peças.

Na tabela seguinte indica-se a frequência absoluta de cada letra.

Letra	A	E	F	G	H	I	O	R	S	T	U	V
Frequência	2	3	2	1	3	2	4	3	2	3	1	2

a) Retirando, ao acaso, uma peça do saco, qual dos seguintes valores é a probabilidade de sair uma **vogal**?

(A) $\frac{2}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$

(C) $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{5}{7}$

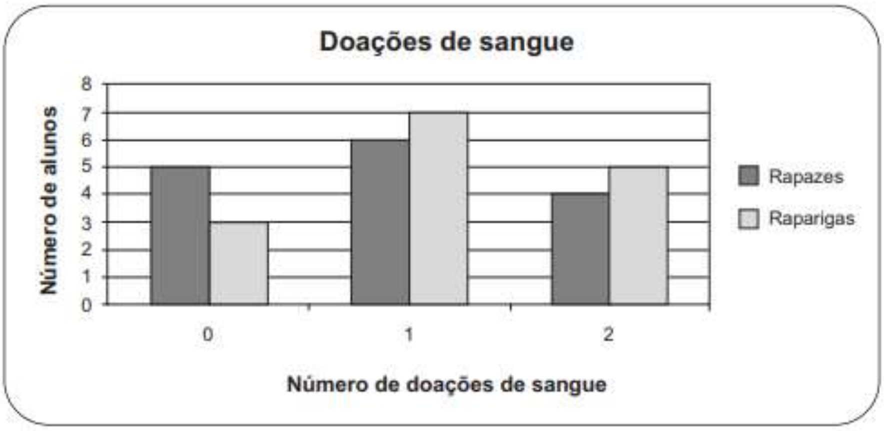
b) Das vinte e oito peças que estavam no saco, o Martim retirou quatro com as quais é possível formar a palavra $GATO$.

Se, imediatamente a seguir, o Martim retirar, ao acaso, outra peça do saco, qual é a probabilidade de sair a letra T?

Apresenta o resultado na forma de fracção.

Não justifiques a tua resposta.

8. Numa Faculdade, realizou-se um estudo sobre o número de alunos da turma da Beatriz que já doaram sangue. O gráfico que se segue mostra o número de doações de sangue, por sexos.



a) Relativamente aos dados do gráfico, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ 30% dos alunos nunca doaram sangue.
- ☐ 30% dos alunos doaram sangue duas vezes.
- ☐ 65% dos alunos doaram sangue mais do que uma vez.
- ☐ 75% dos alunos doaram sangue menos do que duas vezes.

b) Escolhido ao acaso um aluno de entre todos os alunos da turma da Beatriz, qual é a probabilidade de essa escolha ser a de uma rapariga que doou sangue **menos do que duas vezes**?

Apresenta o resultado na forma de fracção irredutível.

22. A comissão organizadora de um arraial fez 250 rifas para um sorteio.

Apenas uma dessas rifas é premiada.

As rifas foram todas vendidas.

A Alice comprou algumas rifas.

Sabe-se que a probabilidade de a Alice ganhar o prémio é $\frac{1}{25}$.

Quantas rifas comprou a Alice?

Assinala a opção correcta.

☐ 25 ☐ 5

☐ 10 ☐ 1

37. Uma certa turma do 9.º ano é constituída por rapazes e por raparigas.

Nessa turma há seis raparigas.

Sabe-se que, escolhendo ao acaso um dos alunos da turma, a probabilidade de esse aluno ser rapaz é $\frac{2}{3}$

Quantos rapazes há nessa turma?

Assinala a opção correcta.

- ☐ 6
- ☐ 9
- ☐ 12
- ☐ 15

Anexo 2.7. – Plano da aula 7

Turma: 9ºB	**Tempo:** 45 min	**Data:** 12 de março
Sumário: Probabilidade em experiências compostas: resolução de exercícios.		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Experiências compostas.

Objetivos
- Utilizar tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore na resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação das probabilidades de diferentes acontecimentos compostos.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Ficha informativa	Ficha informativa Caderno Material de escrita

Modo de Trabalho
- Grupo turma

Desenvolvimento da aula
1. Início da aula. Sumário. (10 min) **2. Exploração de dois exemplos de experiências compostas (30 min)** A professora deverá partir de dois exercícios para mostrar aos alunos como podemos construir diagramas em árvore ou tabelas de dupla entrada de forma a auxiliar a contagem de casos possíveis. Desta forma, a professora construirá no quadro estas representações, interagindo com os alunos para verificar se estes estão a compreender o que está a ser feito. Posteriormente, a professora entrega a ficha informativa com estes mesmos exemplos, mas com as representações construídas, para que em grupo-turma se consiga responder às questões que daí advêm.

Atividade do aluno	Atividade da professora
No decorrer da exploração dos dois exemplos, os alunos poderão ter dificuldades em: • Interpretar a tabela de dupla entrada e o diagrama em árvore; • Calcular as probabilidades pedidas; • Identificar os números compostos; • Classificar os acontecimentos.	A professora deverá: • Auxiliar os alunos na interpretação da tabela de dupla entrada e do diagrama em árvore. • Recordar como se calcula a probabilidade de um acontecimento. • Questionar o que são números compostos (relembrar que foi abordado esse conceito na aula de dia 8 e março). • Questionar os alunos sobre o modo de classificar acontecimentos (relembrar que foi um dos primeiros conceitos a ser abordado).

3. Esclarecimento de dúvidas e encerramento da aula (5 min)

A professora deverá, através do questionamento, verificar se os alunos compreenderam o que foi abordado durante a aula.

A professora deverá informar os alunos que deverão fazer para trabalho de casa a questão nº10 e questão nº11 do manual, deverá ainda informar que estes deverão ser realizados numa folha à parte para que lhe entreguem na aula seguinte.

Exercícios do manual

Questão 10

Um restaurante apresenta uma ementa idêntica à representada na figura 1.

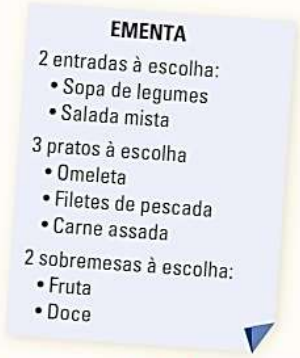


Figura 1

10.1. Quantas refeições diferentes podemos escolher com uma entrada, um prato e uma sobremesa?

10.2. Se escolhermos ao acaso uma das refeições de **10.1.**, qual a probabilidade de escolhermos uma refeição sem sopa?

Questão 11

O pião representado na figura 3 não é viciado e vai ser rodado, sucessivamente, duas vezes.

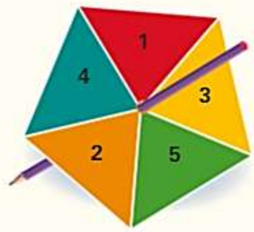


Figura 3

Qual é a probabilidade de sair 3 pelo menos uma vez?

Para responder à questão usa uma tabela de dupla entrada ou um diagrama em árvore.

Anexo 2.8. – Plano da aula 8

Turma: 9ºB	**Tempo:** 45 min	**Data:** 13 de março
Sumário: Probabilidade em experiências compostas: resolução de uma ficha de trabalho.		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Experiências compostas.

Objetivos
- Utilizar tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore na resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação das probabilidades de diferentes acontecimentos compostos.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Ficha de trabalho	Ficha de trabalho Caderno Material de escrita

Modo de Trabalho
- Pequenos grupos - Grupo turma

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula. Sumário. (10 min)

2. Trabalho autónomo dos alunos (20 min)

A professora indicará aos alunos que irão resolver a ficha de trabalho em pequenos grupos e que posteriormente se fará a discussão da mesma no quadro.

A professora deverá ainda informar que no final recolherá as fichas de trabalho e as mesmas serão entregues posteriormente.

Atividade do aluno	Atividade da professora
1. **1.1. Possível resolução:** Casos favoráveis: 1 Casos possíveis: 3	Durante o momento de trabalho autónomo é importante que a professora analise as resoluções dos

$P(\text{"a Eduarda escolher uma sala com nºpar"}) = \frac{1}{3}$ **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em identificar o número de casos favoráveis o número de casos possíveis. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldade em aplicar a Regra de Laplace. **1.2. Possíveis resoluções:** **(1)** Os alunos poderão recorrer a um diagrama de árvore. Casos possíveis: 6 Casos favoráveis: 4 $P(\text{"Daniel escolher salas com nºs diferentes"}) = \frac{2}{3}$ **(2)** Os alunos poderão recorrer a uma tabela de dupla entrada. Casos possíveis: 6 Casos favoráveis: 4 $P(\text{"Daniel escolher salas com nºs diferentes"}) = \frac{2}{3}$	alunos para posteriormente no momento de discussão selecionar as resoluções que considere pertinentes e que contribuam para a discussão. A professora deverá pedir aos alunos para se recordarem do que foi abordado nas aulas anteriores.
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em construir uma tabela de dupla entrada ou um diagrama em árvore para auxiliar a descobrir o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades de compreensão do enunciado. **2.** **2.1.Possíveis resoluções:** **(1)** Os alunos poderão recorrer a uma tabela de dupla entrada. **(2)** Os alunos poderão recorrer a um diagrama em árvore. **(3)** Os alunos poderão encontrar o espaço amostrar sem recorrer a nenhum diagrama auxiliar. $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	A professora deverá sugerir se não será necessário um esquema que auxilie na descoberta do número de casos possíveis e casos favoráveis. A professora deverá esclarecer que o Daniel pretende assistir à apresentação dos dois cursos, qual será a possibilidade de assistir à divulgação dos dois cursos em salas diferentes.

Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em construir uma tabela de dupla entrada ou um diagrama em árvore para auxiliar a descobrir o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades em identificar o espaço amostral. **2.2.** **2.2.1. Possível resolução:** $\boldsymbol{A}$: "***Obter um número maior que 11***" Acontecimento elementar $\boldsymbol{B}$: "***Obter o número zero***" Acontecimento impossível $\boldsymbol{C}$: "***Não obter um número negativo***" Acontecimento certo e possível $\boldsymbol{D}$: "***Obter um número par***" Acontecimento possível e composto. **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não se recordar da classificação de acontecimentos.	A professora deverá sugerir se não será necessário um esquema que auxilie na descoberta do número de casos possíveis e casos favoráveis. A professora deverá questionar, depois dos alunos construírem um esquema que os auxilie, quais são os casos possíveis nesta experiência. ~
2.2.2. **2.2.2.1. Possível resolução:** $\mathbf{A \cap B = \{\,\}}$ **2.2.2.2. Possível resolução:** $\mathbf{A \cap C = \{12\}}$ **2.2.2.3. Possível resolução:** $\mathbf{\overline{A} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}}$ **2.2.2.4. Possível resolução:** $\mathbf{\overline{A \cap B} = E}$ **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão não conseguir identificar o acontecimento solicitado. **(2)** Os alunos poderão não compreender que é para definirem o acontecimento em extensão.	A professora deverá recordar que foi um dos primeiros tópicos a abordar na sala de aula.

	A professora deverá esclarecer os alunos que está a ser solicitado para definirem em extensão esses conjuntos.

3. Discussão da tarefa com os alunos (10 min)

A correção do exercício será realizada no quadro. A professora deverá solicitar a um aluno que resolva o exercício no quadro, para mostrar aos colegas a sua resolução. A professora deverá, através do questionamento, verificar se os alunos ficaram totalmente esclarecidos.

4. Esclarecimento de dúvidas e encerramento da aula (5 min)

A professora deverá, através do questionamento, verificar se os alunos compreenderam o que foi abordado durante a aula.

A professora deverá informar os alunos que deverão fazer para trabalho de casa a questão nº10 e questão nº11 do manual, deverá ainda informar que estes deverão ser realizados numa folha à parte para que lhe entreguem na aula seguinte.

Avaliação

Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Anexo 2.9. – Plano da aula 9

Turma: 9ºB	**Tempo:** 45 min	**Data:** 19 de março
Sumário: Propriedades da probabilidade. Resolução de exercícios.		

Tema	**Tópico**
Probabilidades	Propriedades da probabilidade.

Objetivos
- Reconhecer que $0 \leq P\ (A) \leq 1$. - Justificar que $P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B)$, sendo A e B acontecimentos disjuntos. - Reconhecer que a soma das probabilidades de acontecimentos complementares é igual a 1.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
PowerPoint Manual Projetor Computador *Applet* do *Geogebra*	Manual Caderno Material de escrita

Modo de Trabalho
- Grupo turma - Pequenos grupos

Desenvolvimento da aula

1. **Início da aula. Sumário. (10 min)**

2. **Trabalho autónomo dos alunos (15 min)**

A aula terá início com a proposta de exploração da atividade inicial da página 166 do manual. Uma vez que a atividade inicial é muito extensa, a professora deverá, recorrendo a uma apresentação *PowerPoint* projetar as questões que pretende que os alunos explorem, bem como questões orientadoras que lhes permita estabelecer relações de forma a chegarem às propriedades. A professora deverá circular pela sala para auxiliar os alunos a superarem as suas dificuldades.

Atividade do aluno	Atividade da professora
1. Possível resolução: $$\boldsymbol{S = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$$	
Possíveis dificuldades: Os alunos poderão apresentar dificuldades em identificar o espaço amostral.	A professora deverá recordar o conceito de espaço amostral.
3. Possível resolução: $\boldsymbol{A = \{2, 3, 5\}}$ $\boldsymbol{B = \{4\}}$ $\boldsymbol{C = \{2, 4\}}$ $\boldsymbol{D = \{1, 3, 5\}}$	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em compreender os conceitos de número primo e múltiplo de 4. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades em identificar os elementos pertencentes a cada acontecimento.	A professora deverá questionar se existe algum colega que se recorde do conceito de número primo e de múltiplo de 4. A professora deverá questionar quais são, por exemplo, os números primos existentes no espaço de resultados.
4. **4.1. a)** $\boldsymbol{P(A) = \frac{n^{o}\, CF}{n^{o} CP} = \frac{2}{5}}$ **b)** $\boldsymbol{P(D) = \frac{n^{o}\, CF}{n^{o} CP} = \frac{3}{5}}$ **c)** $\boldsymbol{C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ $\boldsymbol{C \cap D = \{\ \}}$ **d)** $\boldsymbol{\mathrm{P}(C \cup D) = \frac{n^{o}\, CF}{n^{o} CP} = \frac{5}{5} = 1}$ **e)** $\boldsymbol{P(C) + P(D) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1}$	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em identificar a união e interseção de dois acontecimentos. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades calcular a probabilidade da união e da interseção de dois acontecimentos. **(3)** Os alunos poderão ter dificuldades em calcular a probabilidade de um acontecimento.	A professora deverá recordar que numa das aulas anteriores foi abordada a união e a interseção de dois acontecimentos, sendo este exemplo idêntico. A professora deverá questionar como se calcula a probabilidade do acontecimento. Deverá ainda questionar quais são os casos favoráveis e os casos possíveis.

Classifica os acontecimentos C e D em compatíveis ou incompatíveis. **Possível resolução:** C e D são acontecimentos incompatíveis **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não se recordar do conceito de incompatibilidade/compatibilidade de acontecimentos. **Consegues estabelecer uma relação entre P$(\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D})$ e $\boldsymbol{P(C) + P(D)}$?** **Possível resolução:** As duas probabilidades assumem o mesmo valor. **Possíveis dificuldades:** **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades na compreensão da questão. **(2)** Os alunos poderão não conseguir estabelecer nenhuma relação entre o valor das duas probabilidades. **4.2. a)** $\boldsymbol{P(B) = \frac{n^{o}\,CF}{n^{o}CP} = \frac{1}{5}}$ **b)** $\boldsymbol{B \cup C = \{2, 4\}}$ $\boldsymbol{B \cap C = \{4\}}$ **c)** $\boldsymbol{P(B \cup C) = \frac{n^{o}\,CF}{n^{o}CP} = \frac{2}{5}}$ **d)** $\boldsymbol{P(B) + P(C) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}}$ **Classifica os acontecimentos B e C em compatíveis ou incompatíveis.** **Possível resolução:** Os acontecimentos B e C são compatíveis. **A relação que estabeleceste anteriormente, verifica-se relativamente a estes acontecimentos?**	Durante a discussão desta questão, a professora deve questionar se podemos classificar estes acontecimentos ainda de outra forma, pois para além de incompatíveis, estes acontecimentos são complementares. A professora deverá questionar que valor toma cada uma das probabilidades.

Possível resolução: Não, a probabilidade da união dos dois acontecimentos não é igual à soma das probabilidades dos dois acontecimentos. **Possível dificuldade:** Os alunos poderão não ter conseguido estabelecer nenhuma relação na questão anterior.	A professora deverá auxiliar os alunos a estabelecerem uma relação na questão anterior, para que possam verificar se esta se verifica relativamente aos acontecimentos B e C.
Entre que valores pode variar a probabilidade de um acontecimento? **Possíveis resoluções:** **(1)** A probabilidade de um acontecimento pode variar entre 0 e 1. **(2)** $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$, em que A é um acontecimento. **Possíveis dificuldades:** Os alunos poderão não conseguir identificar os valores que a probabilidade de um acontecimento pode tomar.	A professora deverá questionar qual o valor máximo que uma probabilidade pode tomar e qual o valor mínimo. Deverá recordar que esta questão já teria sido trabalhada em aulas anteriores.

3. Discussão da atividade e introdução dos conteúdos associados ao tema (10 min)

A professora deverá, recorrendo a uma apresentação *PowerPoint*, discutir a tarefa com os alunos e introduzir os novos conceitos. Posteriormente, a professora deverá ainda dar um exemplo de aplicação das propriedades.

4. Exploração da *applet* do *Geogebra.* (5 min)

A professora deverá verificar com os alunos que as propriedades se mantêm para diversos valores, recorrendo à exploração da *applet* do Geogebra.

5. Esclarecimento de dúvidas e encerramento da aula (5 min)

A professora deverá, através do questionamento, verificar se os alunos compreenderam o que foi abordado durante a aula.

A professora deverá informar os alunos que deverão fazer para trabalho de casa a questão nº9 da página 168 do manual, deverá ainda informar que estes deverão ser realizados numa folha à parte para que lhe entreguem na aula seguinte.

Avaliação
Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Anexo 2.10. – Plano da aula 10

Turma: 9ºB	**Tempo:** 45 min	**Data: 20** de março
Sumário: Propriedades da probabilidade: resolução de exercícios.		

Tema	Tópico
Probabilidades	Propriedades da probabilidade.

Objetivos
- Reconhecer que $0 \leq P(A) \leq 1$. - Justificar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, sendo A e B acontecimentos disjuntos. - Reconhecer que a soma das probabilidades de acontecimentos complementares é igual a 1.

Capacidades Transversais
- Trabalhar de forma autónoma e colaborativamente. - Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados.

Recursos	
Professor	Aluno
Manual	Manual Caderno Material de escrita

Modo de Trabalho
- Grupo turma - Pequenos grupos

Desenvolvimento da aula

1. **Início da aula. Sumário. (10 min)**

2. **Trabalho autónomo dos alunos (20 min)**

A aula terá início com a proposta de exploração dos exercícios 3 e 4 da página 169 do manual. A professora deverá alertar que a resolução das tarefas será em pequenos grupos e que, posteriormente haverá discussão acerca dos mesmos em grupo-turma. A professora deverá alertar que no final da aula recolherá uma resolução por grupo.

Atividade do aluno	Atividade da professora
3.1. a) Possível resolução: A e B são incompatíveis (não há no horto uma gerbéria com duas cores)	

Então, $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) =}$ $$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$$	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não reparar que os acontecimentos A e B são incompatíveis.	A professora deverá questionar qual o acontecimento $A \cup B$. E, nesse caso, que propriedade podemos aplicar.
b) Possível resolução: O acontecimento $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$ é um acontecimento certo, pois o vaso selecionado ou tem uma flor cor-de-laranja, cor-de-rosa ou amarela. Logo, $\mathbf{P((A \cup B) \cup C) = 1}$	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em compreender como calcular a probabilidade da união de três acontecimentos. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades em identificar que os três acontecimentos são complementares.	A professora deverá pedir aos alunos para identificarem o acontecimento $(A \cup B) \cup C$. Posteriormente, a professora deverá ainda questionar quais os elementos pertencentes a esse acontecimento.
3.2. a) Possível resolução: O acontecimento C é complementar ao acontecimento $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, ou seja: $\mathbf{P(C) + P(A \cup B) = 1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{P(C) = 1 - P(A \cup B)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{P(C)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}$	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em compreender que o acontecimento $\mathbf{A \cup B}$ é complementar ao acontecimento C, pelo que a soma das suas probabilidades é uma unidade. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades em descobrir o valor de $\mathbf{P(C)}$.	A professora deverá pedir para os alunos interpretarem os acontecimentos solicitados e a relação que poderão ter entre eles. A professora deverá esclarecer que se trata de uma equação, onde se pretende descobrir o valor de $P(C)$.
b) Possível resolução:	

O acontecimento "não ser amarela" é complementar ao acontecimento "ser amarela", logo: $$\mathbf{P(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}}$$	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão ter dificuldades em compreender a probabilidade pedida, por apresentar o conectivo de negação "não". **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades em compreender que o acontecimento "não ser amarela" corresponde ao acontecimento complementar de "ser amarela".	A professora deve questionar os alunos acerca dos casos favoráveis ao acontecimento "não ser amarela".
4.1. Possível resolução: Somar a frequência absoluta de cada classe: $\mathbf{8 + 5 + 4 + 1 = 18}$	A professora deve chamar a atenção dos alunos para a variável representada em cada um dos eixos.
Possível dificuldade: Os alunos poderão não verificar que no eixo das ordenadas está representada a frequência absoluta dos funcionários com determinado salário.	
4.2. a) Possível resolução: $$\mathbf{P(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}}$$ $$\mathbf{P(B) = \frac{5}{18}}$$	
Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não conseguir identificar os casos favoráveis aos acontecimentos. **(2)** Os alunos poderão não ser recordar da regra de Laplace.	A professora deverá questionar os alunos "Quantos funcionários têm um salário pertencente à classe A? E à classe B?", "Como se calcula a probabilidade do acontecimento?".
b) Possível resolução: Os acontecimentos A e B são disjuntos porque não pode haver funcionários cujo salário pertença simultaneamente, às classes A e B.	

Possíveis dificuldades: **(1)** Os alunos poderão não estar à vontade com o conceito "disjuntos". **(2)** Os alunos poderão não conseguir compreender como podem verificar se os acontecimentos são disjuntos.	A professora deverá alertar que acontecimentos disjuntos e acontecimentos incompatíveis são sinónimos. Deverá ainda questionar o que significa dois acontecimentos serem incompatíveis.
c) Possível resolução: Como os acontecimentos A e B são disjuntos, então: $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ Pelo que: $\mathbf{P(A \cup B) = \frac{8}{18} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18}}$	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não se recordar da propriedade abordada na aula anterior.	A professora deverá questionar se existe algum colega que se recorde da propriedade abordada na aula anterior.
d) Possível resolução: $\mathbf{P(\overline{\mathit{B}}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}}$	
Possível dificuldade: Os alunos poderão não se recordar da propriedade $\mathbf{P(B) + P(\overline{\mathit{B}}) = 1}$.	A professora deverá questionar se existe algum colega que se recorde da propriedade abordada na aula anterior.
e) Possíveis resoluções: $\mathbf{\overline{A} \cup B}$ é o acontecimento "o salário não pertence à classe A ou o salário não pertence à classe B". Pretende-se a probabilidade de o salário pertencer a uma das classes B, C ou D, ou seja, a probabilidade do acontecimento complementar de A. **(1)** $\mathbf{P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) = 1 - \mathit{P(A)} = \frac{5}{9}}$ **(2)** $\mathbf{P(\overline{A} \cup B) = \frac{5}{18} + \frac{4}{18} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}}$	A professora deverá começar por questionar qual o acontecimento representado por $\overline{\mathrm{A}}$.
Possíveis dificuldades:	

(1) Os alunos poderão ter dificuldades na compreensão do acontecimento $\overline{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}$. **(2)** Os alunos poderão ter dificuldades no cálculo do valor da probabilidade.	A professora deverá questionar se será possível aplicar alguma das regras abordadas na aula anterior.

3. Discussão e esclarecimento de dúvidas (15 min)

A professora deverá discutir a resolução dos exercícios, no quadro, com os alunos. A professora deverá, através do questionamento, verificar se os alunos compreenderam o que foi abordado durante a aula.

<u>Exercícios extra:</u> 1 e 2 da página 168 do manual

Avaliação

Esta aula contemplará uma avaliação reguladora. A professora poderá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que considere que devem ser consolidados, por parte dos alunos. A professora nos momentos de trabalho autónomo dará feedback aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Exercícios do manual

3. Vasos de flores

Num horto vendem-se vasos com gerbérias cor de laranja, cor-de-rosa e amarelas.

Seleciona-se, ao acaso, um vaso com uma gerbéria.

Considera os acontecimentos seguintes:

A: "O vaso seleccionado tem uma flor cor de laranja"

B: "O vaso seleccionado tem uma flor cor-de-rosa"

C: "O vaso seleccionado tem uma flor amarela"

Sabe-se que $P(A)=\frac{1}{5}$ e $P(B)=\frac{1}{3}$.

3.1. Calcula.

a) $P(A \cup B)$ **b)** $P[(A \cup B) \cup C]$

3.2. Determina a probabilidade de ao selecionar, ao acaso, um vaso com uma gerbéria, a cor da flor:

a) ser amarela; **b)** não ser amarela.

4. Os salários dos funcionários de uma empresa

O histograma da figura 4 mostra como se distribuem em classes A, B, C e D os salários dos funcionários de uma pequena empresa.

Figura 4

Por exemplo, os salários que pertencem à classe A são superiores ou iguais a 1000 € e inferiores a 1500 €.

4.1. Justifica que a empresa tem 18 funcionários.

4.2. Encontra-se, ao acaso, um recibo do salário, de um funcionário da empresa. Relativamente a este recibo, considera os acontecimentos:

A: "o salário pertence à classe A"

B: "o salário pertence à classe B"

a) Calcula $P(A)$ e $P(B)$.

b) Os acontecimentos A e B são disjuntos? Justifica a resposta.

c) Calcula $P(A \cup B)$.

d) Calcula $P(\overline{B})$, sendo $\overline{B}$ o complementar de B.

e) Calcula $P(\overline{A} \cup B)$, sendo $\overline{A}$ o complementar de A.

Anexo 2.11. – Plano da aula 11

Turma: 9ºB	**Tempo:** 90 min	**Data: 21** de março
Sumário: Resolução de exercícios. Realização de uma ficha de avaliação sumativa.		

Objetivos
Mobilizar as aprendizagens realizadas no tema “Probabilidades” abordadas nas últimas aulas.

Recursos	
Professor	Aluno
Ficha de avaliação sumativa	Ficha de avaliação sumativa Material de escrita Calculadora

Modo de Trabalho
- Individual - Grupo turma

Desenvolvimento da aula
1. Início da aula. Sumário. (10 min) **2. Realização de exercícios (20 min)** A aula terá início com a resolução de exercícios propostos pelos alunos, de acordo com as suas dificuldades. Durante este momento, a professora deverá resolver em grupo-turma os exercícios propostos pelos alunos. **3. Trabalho autónomo dos alunos para resolução da ficha de avaliação (60 min)** Os alunos trabalharão de forma autónoma na ficha de avaliação sumativa. No final, a professora deverá recolher as fichas de avaliação sumativa que os alunos realizaram.

Avaliação
A realização da ficha de avaliação fará parte da avaliação sumativa dos alunos.

Anexo 3 – Apresentações *PowerPoint*

Anexo 3.1. – Apresentação aula 1

NOÇÃO DE PROBABILIDADE

Qual a probabilidade do Rui Patrício defender um Penálti?

NOÇÃO DE PROBABILIDADE

Dizemos que existe uma probabilidade muito pequena de ganhar o Euromilhões.

TAREFA – PARTE I

A: Girar uma roleta com números entre 1 e 12 e verificar que número se obtém.  Não é possível	**B:** Lançar um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 e verificar que número fica na face voltada para cima.  Não é possível
C: Atirar uma pedra ao rio e verificar se flutua ou se se afunda.  É possível	**D:** Ao colocar umas gotas de azeite num copo de água, observar se o azeite se dissolve ou não.  É possível
E: Lançar uma moeda ao ar no inicio de um jogo de futebol e observar se se obtém face nacional ou face europeia.  Não é possível	

As experiências C e D são **experiências deterministas.**

As experiências A, B e E são **experiências aleatórias.**

TAREFA – PARTE I

A: Girar uma roleta com números entre 1 e 12 e verificar que número se obtém.  {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	**B:** Lançar um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 e verificar que número fica na face voltada para cima.  {1,2,3,4,5,6}
C: Atirar uma pedra ao rio e verificar se flutua ou se se afunda.  Afunda	**D:** Ao colocar umas gotas de azeite num copo de água, observar se o azeite se dissolve ou não.  Não se dissolve
E: Lançar uma moeda ao ar no inicio de um jogo de futebol e observar se se obtém face nacional ou face europeia.  {Face Nacional; Face Europeia}	

As experiências C e D são **experiências deterministas.**

As experiências A, B e E são **experiências aleatórias.**

EXPERIÊNCIAS DETERMINISTAS E ALEATÓRIAS

Uma **experiência** em Probabilidades é um processo que conduz a um resultado que pertence a um conjunto que é designado por "**universo de resultados**" ou por "**espaço amostral**" e representa-se habitualmente por Ω ou por E.

Os elementos do espaço amostral designam-se por **"casos possíveis"**.

Quando existe um único caso possível dizemos que é uma **experiência determinista**. Caso contrário dizemos que é uma **experiência aleatória**.

TAREFA – PARTE II

Acontecimentos

Casos favoráveis

1. Qual o universo de resultados?

$E = \{1,2,3,4,5,6\}$

2. Existe algum número que seja mais provável sair? Porquê?

Não, porque existe o mesmo número de bolas para cada número (neste caso, uma).

3. É possível sair uma bola com o número 0? Porquê?

Acontecimento impossível

Não, porque as bolas estão numeradas de 1 a 6.

4. Quão provável é sair uma bola com um número menor que 7? Porquê?

Acontecimento certo

Sempre! Todas as bolas têm um número menor que 7.

5. Quantas possibilidades existem de sair uma bola com o número 1?

Acontecimento elementar

Uma possibilidade.

6. Que possibilidades existem de sair uma bola com um número superior a 4?

$\boxed{\{5,6\}}$

Acontecimento Composto

ACONTECIMENTOS

Um **acontecimento** é um subconjunto do universo de resultados de uma experiência aleatória.

Aos elementos de um acontecimento chamamos **"casos favoráveis".**

Exemplo:

Considere-se o acontecimento "Sair uma bola com um número superior a 4"

Casos possíveis: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Casos favoráveis: $\{5, 6\}$

ACONTECIMENTOS

Um **acontecimento diz-se impossível** quando nunca ocorre e, por isso, é o conjunto vazio.

Exemplo:"sair uma bola com o número 0"

Um **acontecimento diz-se certo** quando ocorre sempre e, por isso, se os casos favoráveis coincidirem com o universo de resultados.

Exemplo:"sair uma bola com um número menor que 7"

ACONTECIMENTOS

Um **acontecimento diz-se elementar** quando existe apenas um caso favorável.

Exemplo: "sair uma bola com o número 1"

Um **acontecimento diz-se composto** quando existe mais do que um caso favorável.

Exemplo:"sair uma bola com um número superior a 4"

Anexo 3.2. – Apresentação aula 2

ACONTECIMENTOS INCOMPATÍVEIS

Considere-se a experiência que consiste em lançar um dado com 6 faces e verificar qual o número de pintas da face que fica virada para cima.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

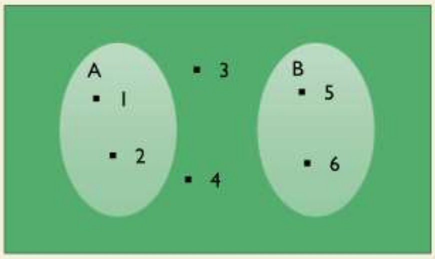
A :"saída de uma face com número de pintas menor ou igual a 2"

$$A = \{1,2\}$$

B :"saída de uma face com número de pintas maior que 4"

$$B = \{5,6\}$$

Dois acontecimentos são **disjuntos** ou **incompatíveis** quando a respetiva interseção for o conjunto vazio, caso contrário são compatíveis.



ACONTECIMENTOS COMPLEMENTARES

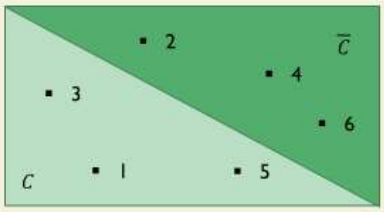
C :"saída de uma face com um número ímpar de pintas"

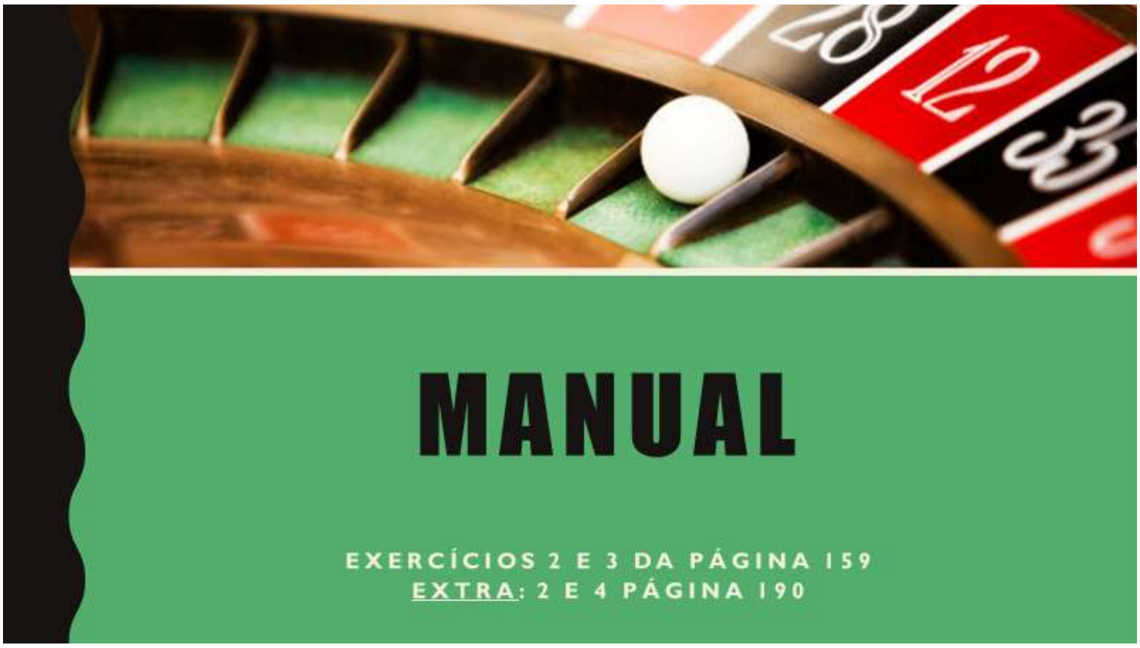
$$C = \{1,3,5\}$$

$\overline{C}$:"saída de uma face com um número par de pintas"

$$\overline{C} = \{2,4,6\}$$

Dois acontecimentos são **complementares** quando são disjuntos e a sua reunião for igual ao espaço de resultados.




MANUAL
EXERCÍCIOS 2 E 3 DA PÁGINA 159
EXTRA: 2 E 4 PÁGINA 190

Anexo 3.3. – Apresentação aula 3

TAREFA – PARTE I

2.Simula a experiência, lançando uma moeda de 1€ dez vezes, registando as faces saídas. Para isso representa a face nacional por N e a face europeia por E, na seguinte tabela:

Face	Frequência relativa
Europeia	$\frac{56}{120} \approx 0{,}47\ (47\%)$
Nacional	$\frac{64}{120} \approx 0{,}53\ (53\%)$

Grupo	Nº de experiências	Número de ocorrências da face	
		Europeia	Nacional
1	10	4	6
2	10	2	8
3	10	3	7
4	10	6	4
5	10	2	8
6	10	5	5
7	10	4	6
8	10	7	3
9	10	6	4
10	10	4	6
11	10	5	5
12	10	8	2
TOTAL	120	56	64

LEI DOS GRANDES NÚMEROS

Quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se adota como probabilidade desse acontecimento.

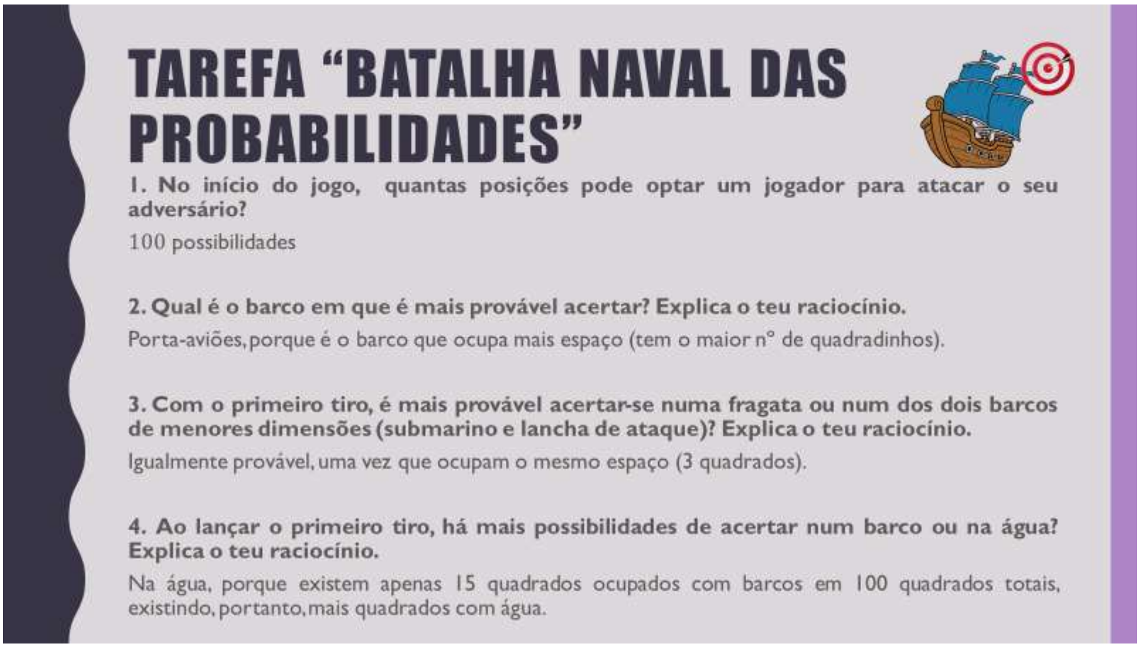
Lado da Moeda	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Nacional	51	0.51
Europeia	49	0.49
Total	100	1

ACONTECIMENTOS EQUIPROVÁVEIS

Os acontecimentos são **equiprováveis** quando cada um dos casos possíveis ocorre com **aproximadamente** a mesma probabilidade.

Lado da Moeda	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Nacional	25	0.5
Europeia	25	0.5
Total	50	1

Anexo 3.4. – Apresentação aula 5



TAREFA "BATALHA NAVAL DAS PROBABILIDADES"

5. Que fração do mar está ocupada por cada um dos barcos?

Porta-aviões: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

Couraçado: $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

Fragata: $\frac{3}{100}$

Submarino: $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

Lancha de ataque: $\frac{1}{100}$

6. Como podes calcular a probabilidade de acertar no porta-aviões?

Será o quociente entre o espaço ocupado pelo porta-aviões e a totalidade do mar, neste caso $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

REGRA DE LAPLACE

Numa experiência aleatória onde os casos possíveis sejam em número finito e equiprováveis, a probabilidade de um determinado acontecimento A é dada por:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\boldsymbol{número\ de\ casos\ favoráveis\ à\ realização\ de\ A}}{\boldsymbol{número\ total\ de\ casos\ possíveis}}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad P(A) \epsilon [0,1]$$

A probabilidade pode representar-se na forma de fração, na forma de decimal ou na forma de percentagem.

Ver página 160 e 161 do manual

ACONTECIMENTOS

A probabilidade de um acontecimento **impossível** é ..zero.

➢ $N^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis\ =\ 0$

A probabilidade de um acontecimento **certo** é … um.

➢ $N^{\underline{o}}de\ casos\ favoráveis\ =\ n^{\underline{o}}\ de\ casos\ possíveis$

A probabilidade de um acontecimento **possível** é … diferente de zero.

➢ $N^{\underline{o}}de\ casos\ favoráveis \leq n^{\underline{o}}\ casos\ possíveis$

➢ $N^{\underline{o}}de\ casos\ favoráveis \neq 0$

EXEMPLO

Exercício 1 da página 163 do manual

1. Considera a experiência aleatória que consiste em rodas o ponteiro da roda da sorte representada ao lado e anotar o número que saiu.

1.1. $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

1.2.

a) $P(\text{" } sair\ um\ número\ par \text{ "}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) $P(\text{" } sair\ um\ número\ primo \text{ "}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} = \frac{5}{12}$

c) $P(\text{" } sair\ um\ múltiplo\ de\ 6 \text{ "}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

d) $P(\text{" } sair\ um\ divisor\ de\ 12 \text{"}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

e) $P(\text{" } sair\ um\ número\ menor\ que\ 3 \text{ "}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

EXEMPLO

Exercício 1 da página 163 do manual

f) $P(\text{" sair um número inferior a 15 "}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} = \frac{12}{12} = 1$

g) $P(\text{" sair um número menor que 12 "}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} = \frac{11}{12}$

h) $P(\text{" sair um número que nem é primo nem é composto"}) = \frac{n^{\underline{o}}casos\ favoráveis}{n^{\underline{o}}casos\ possíveis} =$

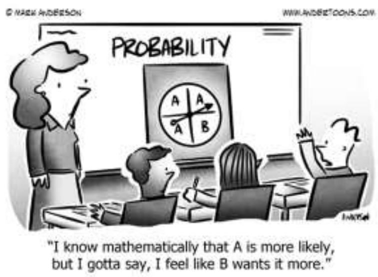
$= \frac{1}{12}$

MANUAL

QUESTÕES 6 E 7
(PÁGINAS 161 E 162)

Anexo 3.5. – Apresentação aula 9

PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE



19 DE MARÇO DE 2018

ATIVIDADE INICIAL 4 (P. 166)

Questão 1

Questão 3

Questão 4.1

Classifica os acontecimentos C e D em compatíveis ou incompatíveis.

Consegues estabelecer uma relação entre $P(C \cup D)$ e $P(C) + P(D)$?

Questão 4.2

Classifica os acontecimentos B e C em compatíveis ou incompatíveis.

A relação que estabeleceste anteriormente, verifica-se relativamente a estes acontecimentos?

Entre que valores pode variar a probabilidade de um acontecimento?

ATIVIDADE INICIAL 4 (P. 166)

1. $S = \{1,2,3,4,5\}$

3. $A = \{2,3,5\}$

$B = \{4\}$

$C = \{2,4\}$

$D = \{1,3,5\}$

C e D: **Acontecimentos complementares e, portanto, incompatíveis**

4.1. a) $P(A) = \frac{n^{\underline{o}}\ CF}{n^{\underline{o}} CP} = \frac{2}{5}$

b) $P(D) = \frac{n^{\underline{o}}\ CF}{n^{\underline{o}} CP} = \frac{3}{5}$

c) $C \cup D = \{1,2,3,4,5\}$

$C \cap D = \{\ \}$

d) $P(C \cup D) = \frac{n^{\underline{o}}\ CF}{n^{\underline{o}} CP} = \frac{5}{5} = 1$

e) $P(C) + P(D) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

$\boldsymbol{P(C \cup D) = P(C) + P(D)}$

ATIVIDADE INICIAL 4 (P. 166)

1. $S = \{1,2,3,4,5\}$

3. $A = \{2,3,5\}$

$B = \{4\}$

$C = \{2,4\}$

B e C: **Acontecimentos compatíveis**

$D = \{1,3,5\}$

4.2. a) $P(B) = \frac{n^{\underline{o}}\ CF}{n^{\underline{o}} CP} = \frac{1}{5}$

b) $B \cup C = \{2,4\}$

$B \cap C = \{4\}$

c) $P(B \cup C) = \frac{n^{\underline{o}}\ CF}{n^{\underline{o}} CP} = \frac{2}{5}$

d) $P(B) + P(C) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$\neq$

PROPRIEDADES DAS PROBABILIDADES

Ver página 167 do manual

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

A soma das probabilidades de dois acontecimentos complementares é igual a 1.

Se A e B são dois acontecimentos incompatíveis (disjuntos), então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo:

Sejam A e B dois acontecimentos, disjuntos, de uma determinada experiência aleatória. Sabe-se também que $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$.

Calcula:

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

TRABALHO DE CASA

Questão nº9 (Página 168)

Fazer numa folha à parte para entregar

Anexo 4 – Autorização aos encarregados de educação

Caro(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Carina Caminho, encontro-me a realizar a prática de ensino supervisionada no ICE, sob a orientação do Dr. Valter Carlos, no âmbito do mestrado em ensino da Matemática, da responsabilidade da Universidade de Lisboa. Nesse âmbito proponho-me realizar um estudo a partir do trabalho que irei desenvolver com a turma, numa unidade didática do programa de matemática, e que irá integrar o meu relatório final de curso. Para tal necessitarei de proceder à recolha de alguns elementos a partir dos documentos produzidos pelos alunos na aula e do registo em vídeo e áudio das aulas, os quais se destinam apenas à realização deste trabalho académico. A participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, será garantindo o anonimato quer dos alunos quer da escola e que a Direção do ICE já deu a sua autorização para a realização deste estudo.

Para a concretização deste trabalho será essencial a participação voluntária dos alunos, pelo que solicito o seu consentimento para a participação do seu educando, preenchendo, assinando e encaminhando o formulário em anexo para o Dr. Valter Carlos, professor de matemática da turma.

Agradeço antecipadamente a sua colaboração e a do(a) seu(sua) educando(a).

Com os meus melhores cumprimentos.

______________, ___ de ____________ de 2017

A Mestranda em Ensino da Matemática,

Carina Caminho

Autorização

Eu, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ___________________________________, n.º _____, da turma ____, tomei conhecimento do estudo a realizar pela estagiária Carina Caminho na disciplina de Matemática, ____________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do(a) meu(minha) educando(a), com a garantia de respeito pela sua privacidade e pelo seu anonimato.

Relativamente à gravação de imagens das aulas, apenas para análise neste estudo, __________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e o seu anonimato.

_____ de __________ de 2017

O(A) Encarregado(a) de Educação

____